YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MAKİNE FAKÜLTESİ / MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

Ders: MKT3841 Sayısal Yöntemler Gr1	**Tarih:** 15.01.2026 **Duration:** 80 min.
Sınav Tipi: Final Sınavı	**Dersin Öğretim Üyesi:** Prof.Dr. Cüneyt Yılmaz

Öğrenci Ad/Soyad:	**Öğrenci No:**	**Öğrenci İmza:**

Soru 1) [33 puan] Aşağıdaki diferansiyel denklemin sonlu fark denklemlerini matris formunda x=0.0' dan 0.2' ye kadar n=3 için elde ediniz:

$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\,y' + 10\,x$, $y(0.0) = 2$ ve $y'(0.2) = 5$.

	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$
$2hf'(x)$		-1	0	1	
$h^2 f''(x)$		1	-2	1	
$2h^3 f'''(x)$	-1	2	0	-2	1
$h^4 f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

Çözüm 1) Verilen tabloyu kullanarak gerekli hesaplamaları yapın ve diferansiyel denklemi sonlu fark formunda (i indeks değişkeniyle) yazın:

h=Δx=(0.3-0.0)/(n-1)= (0.2-0.0)/(3-1) = 0.1

Tablodan: $y'_i = (y_{i+1} - y_{i-1}) / (2h)$

$$y_i'' = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) / h^2 = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) / 0.1^2$$

Dif. Dnk.: $y_i'' = -5y_i' + x_i \rightarrow \left(\frac{1}{0.1^2}\right)(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + 4\left(\frac{1}{2\cdot 0.1}\right)(y_{i+1} - y_{i-1}) = 10\,x_i$

$$100\,y_{i-1} - 200\,y_i + 100\,y_{i+1} + 20\,y_{i+1} - 20\,y_{i-1} = 10\,x_i$$

$$80\,y_{i-1} - 200\,y_i + 120\,y_{i+1} = 10\,x_i \quad , \quad i=2 \text{ ve } 3 \ (y_1 \text{ zaten mevcut})$$

Her adım (i) için sonlu fark denklemlerini (x_i ve sonlu fark denklemlerini) yazın:

$i=1$: $x_1 = 0$, $\mathbf{y_1 = 2}$

$i=2$: $x_2 = 0.1$, $\mathbf{80\,y_1 - 200\,y_2 + 120\,y_3 = 1}$

$i=3$: $x_2 = 0.2$, $80\,y_2 - 200\,y_3 + 120\,y_4 = 2$

$y'_3 = 5 \rightarrow y'_3 = (y_4 - y_2)/(2h) = (y_4 - y_2) / 0.2 = 5 \rightarrow y_4 = y_2 + 1$

$\rightarrow 80\,y_2 - 200\,y_3 + 120\,(y_2 + 1) = 2$

$\rightarrow \mathbf{200\,y_2 - 200\,y_3 = -118}$

Sonlu fark denklemlerini matris formunda yazın:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{80} & \mathbf{-200} & \mathbf{120} \\ \mathbf{0} & \mathbf{200} & \mathbf{-200} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \\ \mathbf{y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-118} \end{bmatrix}$$

Sonlu fark denklemleri yazılırken sadeleştirme yapılmışsa, aşağıdaki sonuç da edilebilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-20} & \mathbf{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \\ \mathbf{y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0.1} \\ \mathbf{-1.18} \end{bmatrix}$$

tonozdayim.com/@seventhgrade

Soru 2) [33 puan] Aşağıdaki denklem sistemini, **Dolittle'ın LU Ayrıştırma Yöntemi**'ni kullanarak tüm detaylarıyla çözün.

$$\boldsymbol{x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 + 20 = 0}$$
$$\boldsymbol{-x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 - 1 = 0}$$
$$\boldsymbol{2\,x_1 - 2\,x_2 + 1\,x_3 + 1 = 0}$$

Not: Doğrulama işlemi çok kolay. Sonuçlarınızı kontrol etmeyi ihmal etmeyin.

Çözüm 2) Eş zamanlı denklemleri matris formunda yazın ve ardından LU ayrıştırma yöntemini uygulayın:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -20 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A = L \cdot U}$$

Gauss eliminasyonu:

row2 – (-1) x row1 → row2 , $L_{21} = -1 \rightarrow$ $\boldsymbol{A'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

row3 – (2) x row1 → row3 , $L_{31} = 2 \rightarrow$ $\boldsymbol{A''} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & -6 & -9 \end{bmatrix}$

row3 – (6) x row2 → row3 , $L_{32} = 6 \rightarrow$ $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -51 \end{bmatrix}$ and $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A \cdot X = B}$$
$$\boldsymbol{L \cdot (U \cdot X) = B}$$
$$\boldsymbol{Y = U \cdot X} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{L \cdot Y = B} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -20 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$y_1 = -20$, $y_2 = -20 + 1 = -19$, $y_3 = -2\,(-20) - 6(-19) - 1 = 153$ → $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -20 \\ -19 \\ 153 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{U \cdot X = Y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -51 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -19 \\ 153 \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

$x_3 = \frac{153}{-51} = -3$, $x_2 = 19 + 7(-3) = -2$, $x_1 = -20 - 2(-2) - 5(-3) = -1$ → $\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{-3} \end{Bmatrix}$

Sağlama:

$$(-1) + 2\,(-2) + 5\,(-3) = -20 \quad \surd$$
$$-(-1) - 3\,(-2) + 2\,(-3) = 1 \quad \surd$$
$$2(-1) - 2(-2) + 1\,(-3) = -1 \quad \surd$$

tonozdayim.com/@seventhgrade

Soru 3) [34 puan] Kapalı bir silindirin hacmi bir formülle verilir.

$$V(x) = 100 \cdot x - \pi \cdot x^3$$

Formülüyle verilmektedir. Burada x yarıçaptır. **Altın Parantezleme yöntemi**ni kullanarak, maksimum hacim $V_{max}(x)$ ' i elde edecek şekilde **yarıçap** x ' i sayısal olarak hesaplayın. x ' in pozitif bir gerçek sayı olması kısıtlamasını göz önünde bulundurun.

(x değerini 3.2 ile $3.3\ cm$ arasında arayın. $h \leq 5 \cdot 10^{-2}$ olduğunda teleskopik işlemi durdurun. Altın Oran olarak $R=0.618034$ kullanın. Kısıtlama fonksiyonu için $\lambda=1$ alın. En az 4 desimal basamakla çalışın.)

Çözüm 3) Optimizasyon işleminin gerçekleştirileceği fonksiyonu hazırlayın:

Problemi maksimizasyondan minimizasyona dönüştürmek için fonksiyonun negatifini alırız:

$$f(x) = -V(x) + \lambda \cdot [\min(0, x)]^2 \qquad (\lambda = 1)$$

$$f(x) = -100 \cdot x + \pi \cdot x^3 + [\min(0, x)]^2$$

Aşağıdaki tabloyu kullanarak Altın Parantezleme yöntemiyle fonksiyonu sayısal olarak optimize edin:

(Aşağıda verilen satırlardan daha fazlasını ummayın)

i	a	b	h	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	Eğer $h<\varepsilon$ is DUR
1	3.2000	3.3000	0.1000	3.2382	3.2618	-217.1454	-217.1561	
2	3.2382	3.3000	0.0618	3.2618	3.2764	-217.1561	-217.1455	
3	3.2382	3.2764	0.0382	3.2528	3.2618	-217.1560	-217.1561	Yes

Yalnızca son satır için ayrıntılı hesaplamayı göster:

3 ‘ üncü adımda (i=3):

$$f(x_{22}) > f(x_{12}) \quad \rightarrow \quad a_3 = a_2 \ \ and \ \ b_3 = x_{22} = 3.2764$$

$$x_{13} = b_3 - R \cdot h_3 = 3.2764 - 0.618034 \cdot 0.0382 = 3.2528$$

$$x_{23} = a_3 + R \cdot h_3 = 3.2382 + 0.618034 \cdot 0.0382 = 3.2618$$

$$f(x_{13}) = f(3.2528) = -100 \cdot (3.2528) + \pi \cdot (3.2528)^3 + [\min(0\,, 3.2528)]^2 = -217.1454$$

$$f(x_{23}) = f(3.2618) = -100 \cdot (3.2618) + \pi \cdot (3.2618)^3 + [\min(0\,, 3.2618)]^2 = -217.1561$$

i=3: $h = b_3 - a_3 = 3.2764 - 3.2382 = 0.0382 < 0.05$, the telescoping stopped.

Optimal x=

$$Optimal \ \ x = \frac{3.2382 + 3.2764}{2} = 3.2573 \ cm$$

Maksimum hacim=

$$V_{max} = 100 \cdot (3.2573) - \pi \cdot 3.2573^3 = 217.1567 \ cm^3$$

Not: Aslında son satırdaki f(x1) ve f(x2)’yi hesaplamaya gerek yok, çünkü bu değerler bir sonraki satırdaki a ve b değerlerinin tayininde kullanılmaktadır. Bu çözümde son satıra gitmeye gerek olmadığından f(x1) ve f(x2)’ye ihtiyaç duyulmamaktadır.

tonozdayim.com/@seventhgrade