MKT 2812 Signals and Systems May 23, 2019

Name:_____ Final Exam

ID:_____ Group: _____

1	2	3	4	5

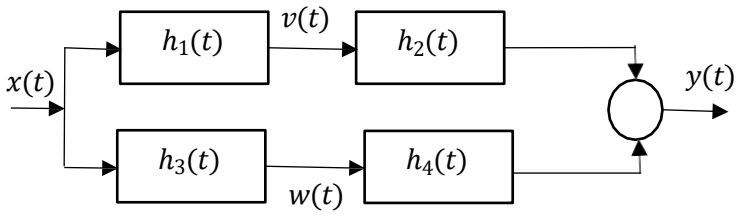
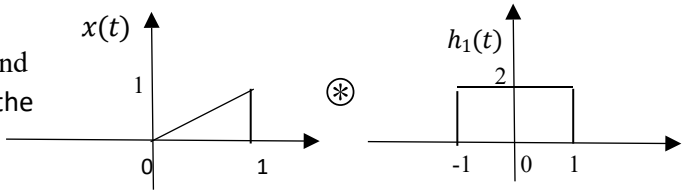


Fig.1 Final Signals and Systems Blocks (Final İşaretler ve Sistemler blok diyagramı)

1) [20 pts.] Express the signals shown with basic signals and perform the convolution of $v(t) = (x \circledast h_1)(t)$ using the graphical computation and plot $v(t)$.

(Gösterilen işaretleri temel işaretler cinsinden ifdade ediniz ve konvolüsyon integralini grafiksel olarak hesaplayınız ve $v(t)$ yi çiziniz)



1) İşaretleri temel işaretlerle ifade et

Birim basamak: $u(t)$

$$x(t)$$

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x(t) = t\,[u(t) - u(t-1)]}$$

$$h_1(t)$$

$$h_1(t) = \begin{cases} 2, & -1 \le t \le 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \Rightarrow \boxed{h_1(t) = 2\,[u(t+1) - u(t-1)]}$$

---

2) Konvolüsyon: $v(t) = (x * h_1)(t)$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\; h_1(t-\tau)\, d\tau$$

$h_1(t-\tau) = 2$olması için:

$$-1 \le t - \tau \le 1 \;\Rightarrow\; t - 1 \le \tau \le t + 1$$

Ayrıca $x(\tau) \neq 0$sadece $0 \le \tau \le 1$aralığında.

Dolayısıyla integral, **örtüşen aralıkta** alınır:

$$v(t) = 2 \int_{\max(0,t-1)}^{\min(1,t+1)} \tau\, d\tau \text{ (örtüşme varsa)}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

$$2\int \tau d\tau = 2 \cdot \frac{\tau^2}{2} = \tau^2 \Rightarrow \boxed{v(t) = [\min(1, t+1)]^2 - [\max(0, t-1)]^2}$$

(örtüşme yoksa $v(t) = 0$).

---

3) Parçalı (sınavda yazılacak net sonuç)

Örtüşme sadece $-1 < t < 2$aralığında vardır.

(i) $-1 < t < 0$

Bu aralıkta $\max(0, t-1) = 0$, $\min(1, t+1) = t+1$:

$$\boxed{v(t) = (t+1)^2}$$

(ii) $0 \le t \le 1$

Bu aralıkta $\max(0, t-1) = 0$, $\min(1, t+1) = 1$:

$$\boxed{v(t) = 1}$$

(iii) $1 < t < 2$

Bu aralıkta $\max(0, t-1) = t-1$, $\min(1, t+1) = 1$:

$$\boxed{v(t) = 1 - (t-1)^2}$$

(iv) Dışarıda

$$\boxed{v(t) = 0, t \le -1 \text{ ve } t \ge 2}$$

Hepsini tek parçada:

$$\boxed{v(t) = \begin{cases} 0, & t \le -1 \\ (t+1)^2, & -1 < t < 0 \\ 1, & 0 \le t \le 1 \\ 1-(t-1)^2, & 1 < t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}}$$

---

4) Basamak fonksiyonuyla kompakt yazım (istersen)

$$\boxed{v(t) = (t+1)^2\,[u(t+1) - u(t)] + 1\,[u(t) - u(t-1)] + (1-(t-1)^2)\,[u(t-1) - u(t-2)]}$$

---

5) $v(t)$**grafiği nasıl çıkar?**

- $t = -1$'de 0'dan başlar.
- -1ile 0arasında **yukarı doğru parabol** ile 1'e çıkar: $(t+1)^2$
- 0ile 1arasında **sabit 1**
- 1ile 2arasında **aşağı doğru parabol** ile 0'a iner: $1-(t-1)^2$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

2) [20 pts.] Let the input of a system be $x(t)$ (with $x(t) = 0\ \forall t < 0$) and the output $w(t)$
(Bir sistemin girişi $x(t)$ (with $x(t) = 0\ \forall t < 0$) ve çıkışı $w(t)$ olsun)

$$w(t) = \int_{t-4}^{t} e^{-2(t-\tau)} x(\tau - 1) d\tau$$

Show whether this system is (Sistem)

a) Linear (Doğrusal mı?)
b) Time-invariant (Zamanla değişmez mi?)
c) Causal (Nedensel mi?)
d) BIBO stable (BIBO kararlımı?).
e) Find $h_3(t)$ the impulse response. ($h_3(t)$ Dürtü cevabını bulunuz.)

a) Lineer mi?

İki giriş için $x_1(t) \to w_1(t)$, $x_2(t) \to w_2(t)$olsun.

$$T\{ax_1 + bx_2\} = \int_{t-4}^{t} e^{-2(t-\tau)}\ [ax_1(\tau - 1) + bx_2(\tau - 1)]\, d\tau$$

$$= a\int_{t-4}^{t} e^{-2(t-\tau)}\, x_1(\tau - 1) d\tau + b\int_{t-4}^{t} e^{-2(t-\tau)}\, x_2(\tau - 1) d\tau = aw_1(t) + bw_2(t)$$

Sistem lineerdir.

---

b) Zamanla değişmez mi (Time-invariant)?

Giriş kaydırılsın: $x_1(t) = x(t - t_0)$.

Sistemin çıktısı:

$$w_1(t) = \int_{t-4}^{t} e^{-2(t-\tau)}\ x_1(\tau - 1)\, d\tau = \int_{t-4}^{t} e^{-2(t-\tau)}\ x((\tau - 1) - t_0)\, d\tau$$

Öte yandan orijinal çıkışı kaydırırsak:

$$w(t - t_0) = \int_{(t-t_0)-4}^{t-t_0} e^{-2((t-t_0)-\lambda)}\ x(\lambda - 1)\, d\lambda$$

$\lambda = \tau - t_0$değişken dönüşümü yapalım ($d\lambda = d\tau$):

- Alt sınır: $\lambda = (t - t_0) - 4 \iff \tau = t - 4$
- Üst sınır: $\lambda = t - t_0 \iff \tau = t$

İçerik:

$$e^{-2((t-t_0)-(\tau-t_0))} = e^{-2(t-\tau)}, x((\tau - t_0) - 1) = x((\tau - 1) - t_0)$$

Dolayısıyla:

$$w(t - t_0) = \int_{t-4}^{t} e^{-2(t-\tau)}\ x((\tau - 1) - t_0)\, d\tau = w_1(t)$$

Sistem zamanla değişmez (time-invariant).

---

c) Nedensel mi (Causal)?

$w(t)$ifadesinde giriş örnekleri $x(\tau - 1)$şeklinde ve integral aralığı $\tau \in [t - 4, t]$.

Bu aralıkta $\tau - 1 \in [t - 5, t - 1]$.

Yani $w(t)$, yalnızca

$x(s)$ değerlerine, $s \leq t - 1 < t$

bağımlıdır (geleceğe $s > t$bağlı değil).

Sistem nedenseldir.

---

d) BIBO kararlı mı?

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

BIBO için genelde impuls cevabının mutlak integrali sonlu mu diye bakılır (LTI olduğu için).
Aşağıda (e)'de $h_3(t)$bulunacak; önceden söyleyelim:

$$h_3(t) = e^{-2(t-1)}\,[u(t-1) - u(t-5)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\,h_3(t)\,|\,dt = \int_{1}^{5} e^{-2(t-1)}\,dt = \Big[\ -\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\Big]_1^5 = \frac{1}{2}(1-e^{-8}) < \infty$$

Sistem BIBO kararlıdır.

---

e) İmpuls cevabı $\boldsymbol{h_3(t)}$

Giriş $x(t) = \delta(t)$seçelim:

$$h_3(t) = w(t) = \int_{t-4}^{t} e^{-2(t-\tau)}\ \delta(\tau - 1)\,d\tau$$

Delta özelliğiyle integral, $\tau = 1$noktası integral aralığının içindeyse değer alır:
Koşul:

$$t - 4 \le 1 \le t \Longrightarrow t \ge 1 \text{ ve } t \le 5$$

Bu durumda:

$$h_3(t) = e^{-2(t-1)}(1 \le t \le 5)$$

aksi halde 0.
Basamak fonksiyonuyla:

$$\boxed{h_3(t) = e^{-2(t-1)}\,[u(t-1) - u(t-5)]}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

3) [20 pts] Transfer function of an LTI system (LTI bir sistemin transfer fonksiyonu)

$$H_4(s) = \frac{2s-10}{(s-1)(s+5)} \qquad ROC: \ -5 < Re\{s\} < 1$$

a) Find the poles and zeros *(Kutup ve sıfırları nelerdir)*

b) Determine if it is causal, anti-causal or non-causal system?
(X(s) bir nedensel, anti-nedensel, veya nedensel-olmayan bir sistem midir?)

c) Find its inverse Laplace transformation *(Ters-Laplace'ını bulunuz)*

a) Sıfırlar ve kutuplar

Sıfırlar (zeros):

$$2s - 10 = 0 \Rightarrow s = 5$$

$$\boxed{\textit{Sıfır: } s = 5}$$

Kutuplar (poles):

$$(s-1)(s+5) = 0 \Rightarrow s = 1, s = -5$$

$$\boxed{\textit{Kutuplar: } s = 1, s = -5}$$

---

b) Nedensel mi / anti-nedensel mi / nedensel değil mi?

ROC verilmiş:

$$-5 < \Re\{s\} < 1$$

Bu ROC, ***iki kutup arasındaki şerit*** *olduğu için iki taraflı (two-sided) zaman bölgesi işaretine karşılık gelir.*

- *Nedensel olsaydı ROC:* $\Re\{s\} > max\ \{kutuplar\} = 1$*olmalıydı.*
- *Anti-nedensel olsaydı ROC:* $\Re\{s\} < min\ \{kutuplar\} = -5$*olmalıydı.*
- *Burada ROC iki kutup arasında* ⇒ ***iki taraflı*** ⇒ ***nedensel değil*** *(non-causal).*

$$\boxed{\textit{Sistem non-causal (iki taraflı)dır.}}$$

---

c) Ters Laplace $\boldsymbol{h_4(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_4(s)\}}$

Önce kısmi kesirlere ayıralım:

$$\frac{2s-10}{(s-1)(s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+5}$$
$$2s - 10 = A(s+5) + B(s-1)$$
$$2s - 10 = (A+B)s + (5A - B)$$

Katsayı eşitle:

$$A + B = 2$$
$$5A - B = -10$$

Toplayalım: $6A = -8 \Rightarrow A = -\frac{4}{3}$

$$B = 2 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3}$$

Dolayısıyla:

$$H_4(s) = -\frac{4}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{10}{3}\frac{1}{s+5}$$

Şimdi ***ROC:*** $-5 < \Re\{s\} < 1$*olduğuna göre:*

- $\frac{1}{s+5}$*terimi ROC'yi sağa taşıdığı için* ***sağ-taraflı*** *olmalı:*

$$\frac{1}{s+5} \quad \leftrightarrow \quad e^{-5t}u(t)(\Re\{s\} > -5)$$

- $\frac{1}{s-1}$*terimi ROC'yi sola taşıdığı için* ***sol-taraflı*** *olmalı:*

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

$$\frac{1}{s-1} \quad \leftrightarrow \quad -e^{t}u(-t)(\Re\{s\}<1)$$

Uygulayalım:

$$-\frac{4}{3}\frac{1}{s-1} \quad \leftrightarrow \quad -\frac{4}{3}(-e^{t}u(-t))$$

$$=\frac{4}{3}e^{t}u(-t)$$

$$\frac{10}{3}\frac{1}{s+5} \quad \leftrightarrow \quad \frac{10}{3}e^{-5t}u(t)$$

Sonuç:

$$\boxed{h_4(t)=\frac{4}{3}e^{t}u(-t)+\frac{10}{3}e^{-5t}u(t)}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

4) [20 pts] A periodic signal $x(t)$ has the fundamental frequency $\pi\ rad/sec$ and the period (Periyodik $h_3(t)$ işaretinin temel frekansı $\pi\ rad/san$ ve periyodu)

$$x_1(t) = u(2t+1) - r(t) + r(t-1)$$

a) Show the expression of $x(t)$ by eigen functions (Fourier series). (Bu işareti Fourier serisi olarak gösteriniz.)
b) Using the Fourier series coefficients, find the Fourier transformation? (Fourier serisi katsayılarını kullanarak Fourier dönüşümünü bulunuz.)
c) Plot the magnitude spectrum. (Genlik spekturumunu çiziniz.)

1) Önce $x(t)$'yi parçalı yazalım (1 periyot)

$$u(2t+1) = u(t+1/2)$$

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t < -\frac{1}{2} \\ 1, & -\frac{1}{2} \le t < 0 \\ 1-t, & 0 \le t < 1 \end{cases} \text{ ve} x(t+2) = x(t)$$

---

a) Eigen function (Fourier serisi) ile $x(t)$

Trigonometrik FS ($T = 2$, $\omega_0 = \pi$):

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t))$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt, a_n = \int_{-1}^{1} x(t)\cos(n\pi t)\,dt, b_n = \int_{-1}^{1} x(t)\sin(n\pi t)\,dt$$

(Çünkü $2/T = 1$.)

DC:

$$a_0 = \int_{-1/2}^{0} 1\,dt + \int_{0}^{1} (1-t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}}$$

a_n**:**

$$a_n = \int_{-1/2}^{0} \cos(n\pi t)\,dt + \int_{0}^{1} (1-t)\cos(n\pi t)\,dt$$

Hesap sonucu:

$$\boxed{a_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} + \frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}}$$

b_n**:**

$$b_n = \int_{-1/2}^{0} \sin(n\pi t)\,dt + \int_{0}^{1} (1-t)\sin(n\pi t)\,dt$$

Hesap sonucu:

$$\boxed{b_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}}$$

Dolayısıyla:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} + \frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2} \right) \cos(n\pi t) + \left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \right) \sin(n\pi t) \right]}$$

---

b) Fourier serisi katsayılarından Fourier dönüşümü $X(\omega)$

Kompleks FS:

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}, \omega_0 = \pi$$

ve periyodik işaretin Fourier dönüşümü:

$$\boxed{X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \; \delta(\omega - k\pi)}$$

Katsayı ilişkileri:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k), k \geq 1; c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k)}$$

Buradan $k \geq 1$için açık form:

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi} + \frac{1-(-1)^k}{(k\pi)^2} - j\frac{\cos(\frac{k\pi}{2})}{k\pi}\right]}$$

ve aynı şekilde $c_{-k} = c_k^*$(işaret gerçek olduğu için).

---

c) Genlik spektrumu $|X(\omega)|$ **(çizim mantığı)**

Spektrum **çizgisel (impuls)** olur:

- Çizgiler $\omega = k\pi$noktalarında,
- Her çizginin "yüksekliği" $2\pi \, | \, c_k \, |$.

Yani:

$$\boxed{|X(\omega)| = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \; \delta(\omega - k\pi)}$$

Özellikle:

- $\omega = 0$çizgisi:

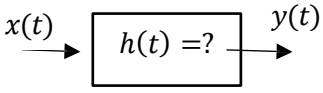
$$2\pi \, | \, c_0 \, | = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\pi}$$

- $\omega = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$, …noktalarında çizgiler; genlikleri $2\pi \, | \, c_k \, |$.

(İstersen sınavda çizim için: ωekseninde $0, \pm\pi, \pm 2\pi$, …noktalarına "stem" çiz; $\omega = 0$'da yükseklik π; diğerleri için yükseklik $2\pi \, | \, c_k \, |$olacak şekilde azalır.)

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

5) [20 pts.] Find the equivalent system of Fig. 1 from external input $x(t)$ to output of $y(t)$ if all subsystems are LTI and given by
(Fig. 1 de ki sistemin alt sistemleri aşağida belirtilen şekilde ise dış giriş $x(t)$'den dış çıkış $y(t)$'ye eşdeğerini bulunuz.)



$$h_1(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$$

$$h_2(t) = e^{-0.5t}u(t-1)$$

$$h_3(t) = \delta(t-2)$$

$$h_4(t) = e^{-5t}u(t+1)$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31