"

Örn: $\lim_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2+3x}\right) = ?$

$\lim_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2+3x}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(2x + \sqrt{4x^2+3x}\right)\cdot\left(2x - \sqrt{4x^2+3x}\right)}{\left(2x - \sqrt{4x^2+3x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - (4x^2+3x)}{2x - \sqrt{4x^2+3x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{2x - \sqrt{4x^2+3x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{2x - |x|\sqrt{4+\frac{3}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{2x + x\sqrt{4+\frac{3}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{x\cdot\left(2+\sqrt{4+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{2+2} = \frac{-3}{4}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\sin x)}{2x^2} = ?$ (L'Hopital kullanılmayacak)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\sin x)}{2x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(\sin x))\cdot(1+\cos(\sin x))}{2x^2\cdot(1+\cos(\sin x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(\sin x)}{2x^2\cdot(1+\cos(\sin x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(\sin x)}{2x^2} \cdot \frac{1}{(1+\cos(\sin x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2(\sin x)}{\sin^2 x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2 x}{2x^2}}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos(\sin x)}}_{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

NOT: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(\sin x)}{\sin^2 x} \overset{\sin x = t}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1} = 1$

$\sin x = t$ diyelim.

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le -2 \\ \frac{1}{x+2}, & -2 < x \le 1 \\ \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor. Buna göre

i) $\lim_{x \to -2} f(x)$ ve $\lim_{x \to 1} f(x)$ limitlerini hesaplayınız.

ii) $x = -2$ ve $x = 1$ noktalarındaki süreksizlik tiplerini belirleyiniz.

i) $\lim_{x \to -2^-} x = -2$, $\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$ } $\lim_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim_{x \to -2^+} f(x)$ olduğu için $\lim_{x \to -2} f(x)$ limit yok.

$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{-(1-\sqrt{x}).(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 1^+} \underbrace{\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}}_{1} . \underbrace{\frac{-1}{1+\sqrt{x}}}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$ } olduğu için $\lim_{x \to 1} f(x)$ limiti yok.

$\frac{1}{3} \neq -\frac{1}{2}$

ii) $f(x)$, $x = -2$ de sonsuz süreksizliğe sahip

$f(x)$, $x = 1$ de sıçramalı süreksizliğe sahip

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ön: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2} & , x<0 \\ a - \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) & , 0 \le x < 1 \\ \frac{a}{b} + \arctan\sqrt{3}\,x & , x \ge 1 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ olmak üzere hangi a ve b değerleri için $f(x)$ fonksiyonu sürekli-dir.

$\lim_{x\to 0^-} x^2 \sin\frac{1}{x^2} = 0$

$-1 \le \sin\frac{1}{x^2} \le 1$

$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x^2} \le x^2$

$\lim_{x\to 0^-} -x^2 = 0$ $\quad$ $\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$

sandviç teoremi gereği

$\lim_{x\to 0^-} x^2 \sin\frac{1}{x^2} = 0$ dır.

$\lim_{x\to 0^+} a - \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) = a - \arcsin\frac{1}{2} = a - \frac{\pi}{6}$

$\lim_{x\to 0^-} x^2 \sin\frac{1}{x^2} = 0.$

$a - \frac{\pi}{6} = 0$

$a = \frac{\pi}{6}$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{\pi}{6} - \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - \arcsin 1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{\pi}{6b} + \arctan\sqrt{3}\,x = \frac{\pi}{6b} + \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{6b} + \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{6b} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6b} = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{-1}{4}$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $x>0$ olmak üzere $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ile verilen

f fonksiyonunun türevini, türevin tanımını

kullanarak bulunuz

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h.(\sqrt{x}).(\sqrt{x+h})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+h}).(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}{h.(\sqrt{x}).(\sqrt{x+h}).(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{h.(\sqrt{x}).(\sqrt{x+h}).(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h.(\sqrt{x}).(\sqrt{x+h}).(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{x}.(\sqrt{x+h}).(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}.2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}=\frac{-1}{2x^{3/2}}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f(x)=\begin{cases} \tan(\sin x), & x\le 0 \\ \frac{1}{x}\sin x^2, & x>0. \end{cases}$

ile tanımlı f fonksiyonunun $x=0$ noktasında türeve sahip olup olmadığını belirleyiniz.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\sin x^2 = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{1}\cdot x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\tan(\sin x)=0 \quad , \quad f(0)=0.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0) \quad , \quad x=0 \text{ noktasında süreklidir.}$$

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{h}\sin h^2-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h^2}{h^2}=1.$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\tan(\sin h)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\tan(\sin h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\underbrace{\frac{\tan(\sin h)}{\sin h}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1}=1$$

$f_+'(0)=f_-'(0)$ olduğundan

$x=0$ noktasında $f(x)$ türevlenebilirdir ve $f'(0)=1$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Örn: g fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli fakat türevlenemez bir fonksiyon ve $g(0)=8$ ise. $f(x)=x.g(x)$ fonksiyonu için $f'(0)$ değerini hesaplayınız.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h.g(h)-0.g(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\,g(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} g(h)$$

$$=g(0)$$

$$=8$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = (1+\ln x)^x$ ise f fonksiyonunun türevini bulunuz..

$$f(x) = (1+\ln x)^x$$

$$\ln(f(x)) = \ln(1+\ln x)^x$$

$$\ln(f(x)) = x \ln(1+\ln x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \ln(1+\ln x) + x \cdot \frac{(1+\ln x)'}{1+\ln x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(1+\ln x) + x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{1+\ln x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(1+\ln x) + \frac{1}{1+\ln x}$$

$$f'(x) = (1+\ln x)^x \left[\ln(1+\ln x) + \frac{1}{1+\ln x}\right]$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Örn: $|x|<1$

$f(x)=(2+\arcsin x)^{\tan x}$ ise $f'(0)$ değerini hesaplayınız.

$$f(x)=(2+\arcsin x)^{\tan x}$$

$$\ln(f(x))=\ln(2+\arcsin x)^{\tan x}$$

$$\ln(f(x))=\tan x \ln(2+\arcsin x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sec^2 x \ln(2+\arcsin x)+\tan x \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2+\arcsin x}$$

$$f'(x)=(2+\arcsin x)^{\tan x}\left[\sec^2 x \ln(2+\arcsin x)+\tan x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot(2+\arcsin x)}\right]$$

$$f'(0)=(2+\underbrace{\arcsin 0}_{0})^{\tan 0}\left[\underbrace{\sec^2 0}_{1}\ln(2+\underbrace{\arcsin 0}_{0})+\tan 0 \cdot \frac{1}{1\cdot(2+\arcsin 0)}\right]$$

$$=(2+0)^0\cdot(1\cdot\ln 2+0)$$

$$=\ln 2.$$

$$f'(0)=\ln 2$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: g ve h fonksiyonları $g(1)=h'(1)=1$,

$g'(1)=h(1)=2$ şartlarını sağlayan pozitif değerli ve türevlenebilen birer fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu da

$f(x)=[g(x^2)]^{h(x)}$ ile tanımlı olsun.

Buna göre $f'(1)$ değerini bulunuz

$f(x)=[g(x^2)]^{h(x)}$, $f(1)=[g(1)]^{h(1)}=1^2=1$

$\ln[f(x)] = \ln[g(x^2)]^{h(x)}$

$\ln[f(x)] = h(x)\ln[g(x^2)]$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x)\ln[g(x^2)] + h(x)\cdot\frac{2x\,g'(x^2)}{g(x^2)}$$

$$f'(1) = f(1)\cdot\left[h'(1)\ln\underbrace{[g(1)]}_{1} + h(1)\cdot\frac{2\,g'(1)}{g(1)}\right]$$

$$f'(1) = 1\cdot[1\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot\frac{2}{1}]$$

$$f'(1) = 8$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\sqrt[3]{x-1} - 3x = 0$ denkleminin $[-\frac{1}{2}, 0]$ aralığında bir kökünün var olup olmadığını araştırınız.

$f(x) = \sqrt[3]{x-1} - 3x$, $[-\frac{1}{2}, 0]$ aralığında sürekli *

$f(0) = -1$

$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{3}{2})^{1/3} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - (\frac{3}{2})^{1/3} = a > 0$

Dolayısıyla f, $[-1, a]$ aralığında her değeri alır. O halde $0 \in [-1, a]$ olduğu için 0 değerini de alır yani $f(c) = 0$ olacak şekilde $c \in [-\frac{1}{2}, 0]$ vardır.

veya

$f(0) = -1 < f(c) = 0 < f(-\frac{1}{2}) = a$.

olduğundan Ara Değer Teoremine göre $f(c) = 0$ olacak şekilde $c \in [-\frac{1}{2}, 0]$ vardır.

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $y - 2\cos(xy - x) = 2x + 3$ eğrisinin $P(0,1)$ noktasındaki teğet doğru denklemini bulunuz.

($y' = -\frac{F_x}{F_y}$ formülü kullanılmayacak.)

$$y - 2\cos(xy - x) = 2x + 3$$

$$y' + (xy - x)' \cdot 2 \cdot \sin(xy - x) = 2.$$

$$y' + (xy' - 1) \cdot 2 \cdot \sin(xy - x) = 2.$$

$$y'|_P + (x\,y'|_P - 1) \cdot 2 \cdot \underbrace{\sin(x - 0)}_{0} = 2.$$

$$y'|_P = 2 \quad , \quad m = y'|_P = 2.$$

Teğet doğru: $m = 2$, $P = (0,1)$

$$y - 1 = 2 \cdot (x - 0)$$

$$y = 2x + 1.$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\sin(xy) = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^3$ eğrisinin x-eksenini kestiği noktaları bulunuz ve eğrinin bu noktalardaki teğet doğrularının birbirine paralel olup olmadığını belirleyiniz.

$y=0$ için $0 = 1 - x^2 \Rightarrow x = \mp 1$ de x eksenini keser

$x=1$ ↙ ↘ $x=-1$. $\Rightarrow$ Noktalar $(1,0)$ ve $(-1,0)$.

I. yol: $\sin(xy) = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^3$

$(xy)'\cos(xy) = -2x - 2yy' + 2xy^3 + 3x^2y^2y'$

$* \quad (y + xy')\cos(xy) = -2x - 2yy' + 2xy^3 + 3x^2y^2y'$

$m_1 = y'|_{(1,0)}$ için $*$ denkleminden

$(0 + y')\underbrace{\cos 0}_{1} = -2 \Rightarrow y' = -2 \Rightarrow m_1 = -2.$

$m_2 = y'|_{(-1,0)}$ için $*$ denkleminden.

$(0 - y')\cos 0 = +2 \Rightarrow -y' = 2 \Rightarrow y' = -2, \; m_2 = -2$

$m_1 = m_2$ olduğundan teğetler paraleldir.

II. yol: $y' = -\dfrac{F_x}{F_y}$, $F = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^3 - \sin(xy)$

$y' = -\dfrac{-2x + 2xy^3 - y\cos(xy)}{-2y + 3x^2y^2 - x\cos(xy)}$,

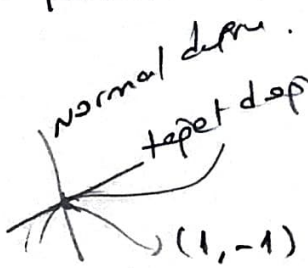
$m_1 = y'|_{(1,0)} = -\dfrac{-2}{-1} = -2$

$m_2 = y'|_{(-1,0)} = -\dfrac{2}{1} = -2$

$m_1 = m_2$ olduğu için teğetler paraleldir.

tonozdayim.com/p2edeleyici51

Örn: $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=1$ noktesindaki normal doğru denklemi $2x+y-1=0$ dır. $x=-1$ noktesinda $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonu vardır. buna göre $(f^{-1})'(-1)=?$



$f(a)=-1 \Rightarrow f^{-1}(-1)=a$ dır.

$2a-1=+1 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$

$2x+y-1=0 \Rightarrow y=\underset{m_N=-2}{-2}x+1$, $m_N=-2$. ise.

$m_N \cdot m_T=-1 \Rightarrow m_T=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$ dir. (m_T: teğet doğrunun eğimi)

$\underbrace{y'|_{(1,-1)}}_{f'(1)}=m_T=\frac{1}{2}$.

$$(f^{-1})'(-1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: Diferansiyel hesap yada lineer yaklaşım kullanarak $\sqrt[3]{28}$ 'in yaklaşık değerini hesaplayınız

$f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f'(x)=\frac{1}{3}.x^{-2/3}$.

$a=27$ için $f(27)=\sqrt[3]{27}=3$, $f'(27)=\frac{1}{3}.(27)^{-2/3}=\frac{1}{3}.\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$.

I. yol

Lineer yaklaşım ile.

$L(x)=f(a)+f'(a).(x-a)$

$L(x)=f(27)+f'(27).(x-27)$

$L(x)=3+\frac{1}{27}.(x-27)$

$f(x)\approx L(x) \Rightarrow f(x)\approx 3+\frac{1}{27}.(x-27)$

$f(28)\approx 3+\frac{1}{27}.(\underbrace{28-27}_{1})$

$f(28)\approx 3+\frac{1}{27}$

$f(28)\approx \frac{82}{27}$

II. yol Diferansiyel hesap ile

$\Delta f\approx df \Rightarrow f(x+dx)-f(x)\approx df$.

$f(x+dx)\approx f(x)+df$, $df=f'(x)dx$

a noktası için $a=27$ ve $dx=1$

$f(a+dx)\approx f(a)+df$, $df=f'(a).dx$

$f(27+1)\approx f(27)+df$, $df=\underbrace{f'(27).1}$

$f(28)\approx 3+\frac{1}{27}.$, $df=\frac{1}{27}.1=\frac{1}{27}$

$f(28)\approx \frac{82}{27}$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f(x)=\frac{\ln(18-2x^2)}{|2x-5|}+\arcsin(x-3)$

fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$18-2x^2>0$, $2x-5\neq 0$, $-1\leq x-3\leq 1$

$18>2x^2$ $x\neq\frac{5}{2}$ $2\leq x\leq 4$

$x^2<9$ $[2,4]$

$(-3,3)$

Tanım kümesi $[2,\frac{5}{2})\cup(\frac{5}{2},3)$

Ör: $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sec x$ fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz ve $(f^{-1})'(\frac{2\pi}{3})$ değerini bulunuz.

$f'(x)=\sec x+x\sec x.\tan x>0 \quad \forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

olduğundan $f(x)$ artandır $\Rightarrow$ f, 1-1 dir f in tersi vardır

$f(a)=\frac{2\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $a\sec a=\frac{2\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $a=\frac{\pi}{3}$ bulunur.

$$(f^{-1})'(\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})}=\frac{1}{\frac{6+2\sqrt{3}\pi}{3}}=\frac{3}{6+2\sqrt{3}\pi}$$

$$f'(\frac{\pi}{3})=\sec\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{3}.\tan\frac{\pi}{3}=2+\frac{\pi}{3}.2.\sqrt{3}=\frac{6+2\sqrt{3}\pi}{3}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}} + \ln\left(\frac{9-x^2}{x^2+x}\right)$

fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$|x|-x > 0$ için tanımlı. $\Rightarrow |x| > x \Rightarrow x < 0$. $(-\infty, 0)$

$\frac{9-x^2}{x^2+x} > 0 \Rightarrow \frac{(3-x)\cdot(3+x)}{x\cdot(x+1)} > 0$

	-3	-1	0	3	
$9-x^2$	$-$ 0 $+$		$+$	$+$ 0	$-$
$x\cdot(x+1)$	$+$	$+$ $\|$ 0	$-$ $\|$	0 $+$	$+$
$\frac{9-x^2}{x\cdot(x+1)}$	$-$	$+$ $\|$	$-$ $\|$	$+$ $\|$	$-$

$(-3,-1) \cup (0,3)$

$(-\infty, 0)$ ve $(-3,-1) \cup (0,3)$

Buradan Tanım kümesi: $(-3,-1)$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)$ limitini hesaplayınız

(L'Hopital kullanılmayacak)

$\forall \theta$ için $-1 \le \sin\theta \le 1$ olduğundan.

$-1 \le \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \le 1$ dir.

$-x^2 \le x^2 \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \le x^2$.

$\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$.

$\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ olduğundan. Sadvik (sıkıştırma)

Teoremi gereği $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) = 0$ dır.

Ör: $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$ ile verilen f fonksiyonunun her x için tersinin mevcudiyetini araştırınız. Tersi varsa $(f^{-1})'(2)$ değerini hesaplayınız.

$$f'(x) = \sqrt{x^2+3} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{x^2+3} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$$

$f'(x) = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}} > 0$; f, her x için artan olduğu için tüm reel sayılarda tersi vardır.

$f(a) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = a$

$a\sqrt{a^2+3} = 2$

$a = 1$ dir

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $g(1)=g'(1)=4$ şartlarını sağlayan türevlenebilen bir fonksiyon olsun ve $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da $f(x)=\frac{g(x^2)}{1+x^2}$ ile tanımlı olsun. Lineer yaklaşım veya diferansiyel hesap kullanarak $f(1.25)$'in yaklaşık değerini bulunuz

$$L(x)=f(1)+f'(1).(x-1) \quad , \quad f(1)=\frac{g(1)}{1+1}=\frac{4}{2}=2$$

$$L(x)=2+f'(1).(x-1)$$

$$L(x)=2+2.(x-1)$$

$f(x)\approx L(x)$ dir.

$$f(x)\approx 2+2.(x-1)$$

$$f(1,25)\approx 2+2.\underbrace{(1,25-1)}_{0,25}$$

$$f(1,25)\approx 2,5$$

---

* $f(x)=\frac{g(x^2)}{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x^2).2x.(1+x^2)-g(x^2).2x}{(1+x^2)^2}$

$$f'(1)=\frac{g'(1).2.2-g(1).2}{2.2}$$

$$f'(1)=\frac{4.4-4.2}{4}=2$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $0<x<1$ olmak üzere $f(x)=\arcsin x-\arccos\sqrt{1-x^2}$ ile tanımlı tanımlı f fonksiyonunun türevini bulup ortaya çıkan durumu yorumlayınız.

$$f(x)=\arcsin x-\arccos\sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{-(\sqrt{1-x^2})'}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{x\cdot\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=0$$

* $\forall x\in(0,1)$ için $f'(x)=0$ olduğu için $f(x)$ sabittir.

(Veya; $f(x)$ fonksiyonunun eğrisi bu aralıkta yatay teğete sahiptir)

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x$ limitini hesaplayınız.

I.yol: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x \to 1^\infty$ belirsizliği

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x \overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^1$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{x-1}}_{e^3}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^1}_{1}$$

$$= e^3 \cdot 1 = e^3$$

---

veriya (*) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{3}}\right)^{\frac{x-1+1}{3}\cdot 3}$

$$= \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{3}}\right)^{\frac{x-1}{3}}\right]^3}_{e^3}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{3}}\right)^1}_{1}$$

$$= e^3 \cdot$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

II. yol.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x = ? \quad (1^\infty \text{ belirsizliği})$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \longrightarrow \infty.0$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} \longrightarrow \frac{0}{0}.$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+2)-\ln(x-1)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-1-x-2}{x^2+x-2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2+x-2} = 3$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x = 3 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x = e^3 \checkmark$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ limitini hesaplayınız.

$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \to \infty^0$ belirsizliği

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} \ln \cot x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1 \cdot \sin x \cdot x}{\sin^2 x \cdot \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$\frac{x}{\sin x} \to 1$ $\quad \frac{1}{\cos x} \to 1$

$$= -1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}\right] = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Örn: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $f(x)=e^{\arctan x}$

fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz ve $(f^{-1})'(e^{\pi/3})$ değerini hesaplayınız

$f(x)=e^{\arctan x}$

$f'(x)=(\arctan x)'.e^{\arctan x}$

$=\frac{1}{1+x^2}e^{\arctan x}>0$ olduğu için fonksiyon artandır ve tersi mevcuttur

$f(a)=e^{\pi/3} \Rightarrow f^{-1}(e^{\pi/3})=a.$

$e^{\arctan a}=e^{\pi/3} \Rightarrow \arctan a=\frac{\pi}{3} \vee a=\sqrt{3}$

$(f^{-1})'(e^{\pi/3})=\frac{1}{f'(\sqrt{3})}=\frac{1}{\frac{1}{1+(\sqrt{3})^2}.e^{\arctan\sqrt{3}}}$

$=\frac{1}{\frac{1}{4}.e^{\pi/3}}=\frac{4}{e^{\pi/3}}=4.e^{-\pi/3}$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir mi? Eğer uygulanabiliyor ise teoremi gerçekleyen c sayısını bulunuz

1.) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$, $x-x^2\geq 0$ için tanımlı

$x\cdot(1-x)\geq 0$ " "

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f		−	0	+	0	−	

≥ 0

$[0,1]$ aralığında tanımlı süreklidir.

2.) $f'(x)=\dfrac{(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}}$, $(0,1)$ aralığında türevlidir

1.) ve 2.) sağlandığından Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir. Dolayısıyla

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$ olacak şekilde $c\in(0,1)$ vardır.

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{1-2c}{2\sqrt{c-c^2}}=\frac{0}{1}$$

$1-2c=0 \Rightarrow c=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{2}\in(0,1)$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f(x)=\sqrt{-x^2+3x-2}$ fonksiyonuna $[1,2]$ aralığında Rolle Teoremi uygulanabilir mi?

Eğer uygulanabilirse teoremi gerçekleyen c sayısını bulunuz

$f(x)=\sqrt{-x^2+3x-2}$, $-x^2+3x-2\geq 0$ için tanımlı

$-x \cdot -2$ $\Big\}$ $x=1$, $x=2$

x		1		2	
f	−	0	+	0	−
		≥ 0			

ya da $(1-x)\cdot(x-2)\geq 0$

$[1,2]$'de $(1-x)\leq 0$, $[1,2]$'de $(x-2)\leq 0$

i) $f(x)=\sqrt{-x^2+3x-2}$, $[1,2]$'de sürekli

ii) $f'(x)=\dfrac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$, $(1,2)$ de türevli

iii) $f(1)=f(2)=0$

i), ii) ve iii) koşulları sağlandığından Rolle Teoremi uygulanabilir

$f'(c)=0$ olacak şekilde $c\in(1,2)$ vardır

$$\frac{-2c+3}{2\sqrt{-c^2+3c-2}}=0 \Rightarrow -2c+3=0 \Rightarrow c=\frac{3}{2}\in(1,2)$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: Eğer $f(0)=-3$ ve her $x\in\mathbb{R}$ için $f'(x)\leq 5$ ise $f(2)$ nin alabileceği en büyük değeri

Ortalama Değer Teoremini yararlanarak bulunuz.

f, $[a,b]$ 'de sürekli

(a,b) 'de türevli ise

$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olacak şekilde $c\in(a,b)$ vardır.

Buna göre

f, $\mathbb{R}$ de türevlenebilir olduğundan $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere $[a,b]\subset\mathbb{R}$ aralığında sürekli dir.

$[a,b]=[0,2]$ alırsak Ortalama Değer Teoremi

Gereği

$*\ f'(c)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$ olacak şekilde

bir $c\in(0,2)$ vardır.

$*\ f'(c)=\dfrac{f(2)+3}{2} \Rightarrow 2f'(c)=f(2)+3$

$\forall x\in\mathbb{R}$ için $f'(x)\leq 5$ ise $\Rightarrow \underbrace{2f'(c)}_{f(2)+3} \leq \overset{2.5=10}{\widetilde{10}}$ dur.

$f(2)+3\leq 10$

$f(2)\leq 7$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: Ortalama Değer Teoremini kullanarak

her $a>0$ sayısı için

$$\frac{1}{3.(a+1)^{2/3}} < \sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a} < \frac{1}{3a^{2/3}}$$

eşitsizliğinin sağlandığını ispatlayınız.

$f(x)=\sqrt[3]{x}$, $[a, a+1]$ seçelim

1.) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $[a,a+1]$'de sürekli

2.) $f'(x)=\frac{1}{3.x^{2/3}}$, $(a, a+1)$ de türevli

Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir.

$$f'(c)=\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}$$ olacak şekilde $c\in(a,a+1)$ vardır.

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{1}{3c^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{a+1}-\sqrt[3]{a}}{1}$$

Ayrıca $c\in(a,a+1) \Rightarrow a<c<a+1$

$$\frac{1}{a+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{3(a+1)^{2/3}}<\frac{1}{3.c^{2/3}}<\frac{1}{3.a^{2/3}}$$

$$\frac{1}{3.(a+1)^{2/3}} < \frac{\sqrt[3]{a+1}-\sqrt[3]{a}}{1} < \frac{1}{3a^{2/3}}$$

bulunur.

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: Ortalama Değer Teoremini kullanarak. her $a>0$ sayısı için

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} < \ln(a+\sqrt{1+a^2}) < a$$ eşitsizliğinin sağlandığını ispatlayınız.

$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ $[0,a]$ olsun

i.) $f(x)$; $[0,a]$ sürekli

ii.) $$f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1+x^2}).(x+\sqrt{1+x^2})}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$(0,a)$ da tanımlı olduğundan $f(x)$, $(0,a)$ da türevlidir. i) ve ii) sağlandığı için $f(x)$ fonksiyonuna Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir.

$$f'(c)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}$$ olacak şekilde $c\in(0,a)$ vardır.

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{\ln(a+\sqrt{1+a^2})}{a}$$ dır. Ayrıca $c\in(0,a) \Rightarrow 0<c<a$ dır.

$0<c<a \Rightarrow 0<\sqrt{1+c^2}<\sqrt{1+a^2}$ dir.

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}<\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}<1 \text{ dir.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}<\frac{\ln(a+\sqrt{1+a^2})}{a}<1 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}<\ln(a+\sqrt{1+a^2})<a$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+4}$ fonksiyonuna $[-1,1]$ aralığında Rolle Teoremi uygulanabilir mi? Eğer uygulanabiliyorsa teoremi sağlayan c değerlerini bulunuz.

i.) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+4}$ $\Rightarrow$ $1-x^2\geq 0$ için tanımlı

$x^2\leq 1$ için tanımlı.. $[-1,1]$ tanımlı

$[-1,1]$ aralığında sürekli

ii.) $f'(x)=\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(x^2+4)-\sqrt{1-x^2}\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-2x^3-8x-4x\cdot(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}\cdot(x^2+4)^2}$

$f'(x)=\frac{2x^3-12x}{2\sqrt{1-x^2}\cdot(x^2+4)^2}=\frac{x^3-6x}{\sqrt{1-x^2}\cdot(x^2+4)^2}$; $(-1,1)$ de türevlenebilir.

iii.) $f(-1)=0$, $f(1)=0$ $\Rightarrow$ $f(-1)=f(1)=0$

i.), ii.) ve iii.) koşulları sağlandığından Rolle Teoremi uygulanabilir.

$f'(c)=0$ olacak şekilde $c\in(-1,1)$ vardır.

$\frac{c^3-6c}{\sqrt{1-c^2}\cdot(c^2+4)^2}=0$ $\Rightarrow$ $c^3-6c=0$ $\Rightarrow$ $c\cdot(c^2-6)=0$

$c_1=0$ $c_2=\sqrt{6}$ $c_3=-\sqrt{6}$

$c_2=\sqrt{6}\notin(-1,1)$

$c_3=-\sqrt{6}\notin(-1,1)$

$c_1=0\in(-1,1)$ dir✓

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

$f(x) = x\sqrt{x-x^2}$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki mutlak maximum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

$$f'(x) = \sqrt{x-x^2} + x\,\frac{(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$= \frac{2(x-x^2)+(x-2x^2)}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$= \frac{3x-4x^2}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$f' = 0 \Rightarrow 3x-4x^2 = 0 \Rightarrow x.(3-4x)=0,\ x=0,\ x=\frac{3}{4}$

f' tanımsız $\Rightarrow x-x^2 = 0 \Rightarrow x.(1-x)=0,\ x=0,\ x=1$

$f(0)=0 \Rightarrow$ mutlak min değeri 0

$f(1)=0 \Rightarrow$ " " " 0

$f(\frac{3}{4}) = \frac{3\sqrt{3}}{16} \Rightarrow$ " max değeri $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f(x)=x\sqrt{16-x^2}$ fonksiyonunun yerel ve mutlak extremum değerlerini bulunuz.

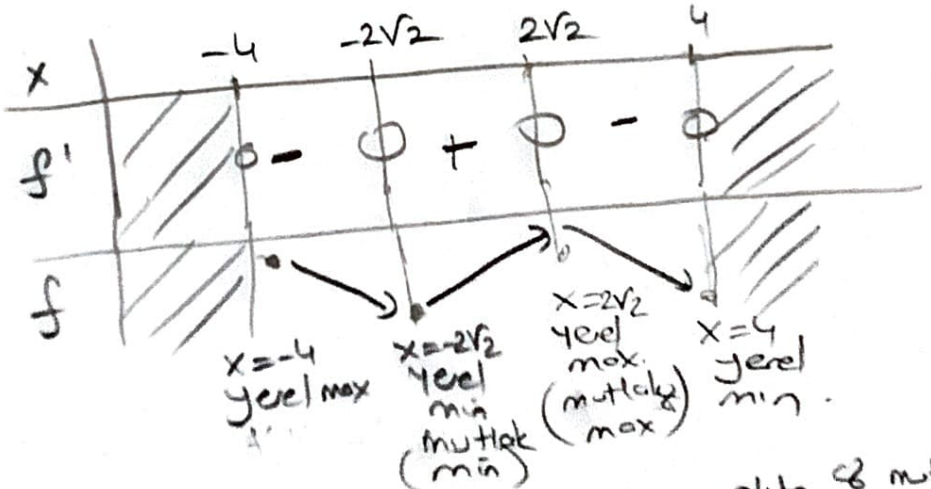
$D(f)$: $[-4,4]$, ($16-x^2\geq 0$ için tanımlı
$x^2\leq 16$, $[-4,4]$ tanımlı.)

f nin tanım kümesi

$$f'(x)=\sqrt{16-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}=\frac{16-x^2-x^2}{\sqrt{16-x^2}}=\frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$f'=0 \Rightarrow 16-2x^2=0 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=\mp 2\sqrt{2}$.

f' tanımsız $\Rightarrow 16-x^2=0 \Rightarrow x=\mp 4$.



$f(2\sqrt{2})=8$, $x=2\sqrt{2}$ mutlak max nokta, 8 mutlak max değer.
$f(-2\sqrt{2})=-8$, $x=-2\sqrt{2}$ mutlak min nokta, -8 mutlak min değer.
$f(-4)=0$, $x=-4$ yerel max nokta, 0 yerel max değer
$f(4)=0$, $x=4$ yerel max nokta, 0 " min değer

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\lim_{x\to 1} \dfrac{\int_1^{x^3} \tan(t-1)\,dt}{x^3-2x^2+x}$ limitini hesaplayınız.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^{x^3} \tan(t-1)\,dt}{x^3-2x^2+x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2\tan(x^3-1)}{3x^2-4x} \to \frac{0}{0}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{6x\tan(x^3-1)+3x^2\cdot 3x^2\cdot \sec^2(x^3-1)}{6x-4}$$

$$= \frac{0+9\cdot 1}{2} = \frac{9}{2}$$

Ör: $\forall x\in\mathbb{R}$ için tanımlı $f(x)=3+\int_0^x \frac{1+\sin t}{2+t^2}\,dt$ fonksiyonu veriliyor.

$f(0)=p(0)$, $f'(0)=p'(0)$ ve $f''(0)=p''(0)$ şartlarını sağlayan $p(x)=ax^2+bx+c$ polinomunu bulunuz.

$f(0)=3+\underbrace{\int_0^0 \frac{1+\sin t}{2+t^2}\,dt}_{0}=3$, $p(0)=f(0) \Rightarrow \underbrace{p(0)=3}_{\Downarrow\ c=3}$

$f'(x)=0+1\cdot\frac{(1+\sin x)}{2+x^2} \Rightarrow f'(0)=\frac{1+\sin 0}{2+0}=\underbrace{\frac{1}{2}}_{b=\frac{1}{2}}$,

$p'(0)=f'(0) \Rightarrow p'(0)=\frac{1}{2}$.

$f''(x)=\frac{\cos x\cdot(2+x^2)-(1+\sin x)\cdot 2x}{(2+x^2)^2}$, $f''(0)=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}$

$p(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow p(0)=c$, $p'(x)=2ax+b \Rightarrow p'(0)=b$.

$p''(x)=2a \to p''(0)=2a$. | $c=3$, $b=\frac{1}{2}$, $2a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

$p(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+3$

tonguyim.com@zeleyici31

Örn: $t \geq 1$ için f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, F fonksiyonu

$$F(x) = \int_1^x \frac{f'(t)}{1+[f(t)]^2}\,dt$$ ile tanımlansın.

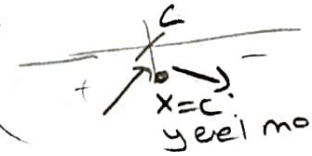
F, $x=c$ de bir maksimuma sahip ise f fonksiyonunun da $x=c$ de bir maksimuma sahip olduğunu gösteriniz.

$$[F(x)]' = \left[\int_1^x \frac{f'(t)}{1+[f(t)]^2}\,dt\right]'$$

$$* \quad F'(x) = 1 \cdot \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$ olup $x=c$ noktası F için bir kritik sayıdır ve $F'(c)=0$ dır.

$F'(c)=0$ olduğundan $*$'dan $f'(c)=0$ dır.

Diğer taraftan f c noktasında yerel bir maksimuma sahipse



$x<c$ iken $F'(x)>0$

$x>c$ iken $F'(x)<0$ dır.

Yani $F'(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0$

$F'(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0$ dır.

O halde f fonksiyonu da $x=c$ de bir yerel maksimuma sahiptir

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $y = x + \sin x$ fonksiyonunun yerel extremum değerlerinin olup olmadığını araştırınız.

$y = x + \sin x$

$y' = 1 + \cos x$

$y' = 0 \Rightarrow 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1$

$x = \mp\pi, \mp 3\pi, \mp 5\pi, \dots$

kritik noktalar.

$y'' = -\sin x$

$y''\big|_{\mp\pi, \mp 3\pi, \mp 5\pi, \dots} = 0$ olduğu için ikinci türev testi yorum vermez

Ancak $y' = 1 + \cos x > 0 \quad (x \neq \mp\pi, \mp 3\pi, \mp 5\pi, \dots)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur dolayısıyla yerel extremum değerleri mevcut değildir.

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

$F(x)=\int_0^{x^2} e^{t^2}dt$ olsun $F(x)$ fonksiyonunun artan, azalan, yukarı ve aşağı konkav olduğu aralıkları bulunuz $F(x)$ in yerel ekstremum değerlerini belirleyiniz

$$F(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$$

$$F'(x)=2x\cdot e^{-x^4}-0=2xe^{-x^4}$$

$F'=0 \Rightarrow 2xe^{-x^4}=0 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		∞
F'		$-$	0	$+$	
		↘	.	↗	

$x=0$ yerel min nok.
$F(0)=0$, yerel min değer.

$$F''(x)=2e^{-x^4}-8x^4e^{-x^4}=2e^{-x^4}(1-4x^4)$$

$F''=0 \Rightarrow 1-4x^4=0 \Rightarrow x^4=\frac{1}{4}$, $x=\mp\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$		$\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$		∞
F''		$-$	0	$+$	0	$-$	
F	aşağı konkav		yukarı konkav		aşağı konkav		

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

1.) $\int \ln\sqrt{x+1}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$\ln\sqrt{x+1} = u$ $\qquad dx = dv$

$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx = du}{\sqrt{x+1}}$ $\qquad x = v$

$\frac{1}{2.(x+1)}\,dx = du$

$$\int \ln\sqrt{x+1}\,dx = x\ln\sqrt{x+1} - \int \frac{x}{2(x+1)}\,dx$$

$$= x\ln\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$

*NOT: $x+1=t$, $dx=dt$

$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|x+1|$

$$= x\ln\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= x\ln\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

II. yol

$$\int \ln\sqrt{x+1}\,dx = \int \ln t\,.\,t\,dt = 2\int \ln t\,.\,t\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\ln t - \int \frac{t}{2}\,dt\right]$$

$\sqrt{x+1}=t$, $x+1=t^2$, $dx=2t\,dt$

$\ln t = u$ $\qquad t\,dt = dv$

$\frac{1}{t}\,dt = du$ $\qquad \frac{t^2}{2} = v$

$$= t^2\ln t - \frac{t^2}{2} + c$$

$$= \left(\sqrt{x+1}\right)^2\ln\sqrt{x+1} - \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{2} + c$$

$$= (x+1)\ln\sqrt{x+1} - \frac{(x+1)}{2} + c$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Örn: $\int \sec^2\sqrt{x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$\sqrt{x}=t$.
$\frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt$
$dx=2\sqrt{x}\,dt$.

$$\int \sec^2\sqrt{x}\,dx=\int \sec^2 t\, 2\sqrt{x}\,dt$$
$$=2\int \sec^2 t\cdot t\,dt$$
$$=2\underbrace{\int t\sec^2 t\,dt}_{I_1}$$

$I_1=\int t\sec^2 t\,dt$ için kısmi integrasyon.

$t=u$ $\quad \sec^2 t\,dt=dv$.
$dt=du$ $\quad \tan t=v$.

$$I_1=\int t\sec^2 t\,dt = t\tan t-\int \tan t\,dt$$
$$= t\tan t-\int \frac{\sin t}{\cos t}dt.$$
$$= t\tan t+\ln|\cos t|+c.$$

Not:
$\cos t=u$
$-\sin t\,dt=du$
$\int \frac{\sin t}{\cos t}dt=\int \frac{-du}{u}$
$=-\ln|u|+c$
$=-\ln|\cos t|+c$

$$\int \sec^2\sqrt{x}\,dx=2\int t\sec^2 t\,dt$$
$$=2\,(t\tan t+\ln|\cos t|)+c$$
$$=2\,(\sqrt{x}\tan\sqrt{x}+\ln|\cos\sqrt{x}|)+c$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Örn: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(\tan x - 2\ln\cos x)}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^{\pi/4} e^{\tan x - 2\ln\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\tan x}\cdot e^{-2\ln(\cos x)}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} e^{\tan x}\cdot e^{\ln(\cos x)^{-2}}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} e^{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$\tan x = u$

$\frac{dx}{\cos^2 x} = du$

$x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4} = u.$
$1 = u$

$x=0 \Rightarrow \tan 0 = u$
$0 = u$

$$= \int_0^1 e^u\,du.$$

$$= e^u\Big|_0^1$$

$$= e^1 - e^0$$

$$= e - 1 \quad //$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\int x^2 \arctan x\,dx$ integralini hesaplayınız.

$\arctan x = u$

$\frac{1}{1+x^2}dx = du$

$x^2dx = dv$

$\frac{x^3}{3} = v$

$$\int x^2 \arctan x\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\arctan x - \int \frac{x^3}{3.(1+x^2)}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\cdot\int \frac{x^3}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\int x\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln|1+x^2| + C$$

NOT: $\int \frac{x}{1+x^2} = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$

$1+x^2 = u$

$2x\,dx = du$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\underbrace{\int_0^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)^5}}}_{I}$ integralini hesaplayınız.

$x = \sin\theta$. $dx = \cos\theta d\theta$. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \\ x = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \end{array}\right\}$

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2\theta \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)^5}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2\theta \cos\theta . d\theta}{\cos^5\theta .} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta .$$

$$= \int_0^{\pi/6} \tan^2\theta \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \left. \frac{\tan^3\theta}{3} \right|_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{\tan^3 \frac{\pi}{6}}{3} - \frac{\tan^3 0}{3}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{3} - 0 ?$$

$$= \frac{1}{9\sqrt{3}}$$

NOT: $\int \tan^2\theta \sec^2\theta d\theta =$ ($\tan\theta = u$. $\sec^2\theta . d\theta = du$)

$= \int u^2 du$

$= \frac{u^3}{3} + C$

$= \frac{\tan^3\theta}{3} + C$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)}$ integralini hesaplayınız.

$\ln x = u$, $\frac{1}{x}dx = du$. $\left.\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow u=\ln 1=0 \\ x=e^{\pi/4} \Rightarrow u=\ln e^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}. \end{array}\right\}$

$$\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)} = \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec^2 u\, du$$

$$= \tan u \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1.$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $x \geq 1$ olmak üzere $f(x) = \int_1^x (2t)^t dt$ ise.

$f''(1)$ değerini bulunuz.

$$[f(x)]' = \left[\int_1^x (2t)^t dt\right]'$$

$$f'(x) = 1.(2x)^x$$

$$\ln f'(x) = \ln(2x)^x$$

$$\ln f'(x) = x \ln(2x)$$

$$[\ln f'(x)]' = [x \ln(2x)]'$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x}$$

$$f''(x) = (\ln 2x + 1) f'(x)$$

$$f''(x) = (\ln 2x + 1).(2x)^x$$

$$f''(1) = (\ln 2 + 1) \cdot 2$$

$$f''(1) = 2(\ln 2 + 1)$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

$x>0$ için

Ör: $f(x)=(1+\ln x)^x$, $g(x)=\int_x^{f(x)} \cosh^2 t\,dt$

fonksiyonları için $f'(1)$ ve $g'(1)$ değerlerini hesaplayınız.

$f(x)=(1+\ln x)^x \Rightarrow \ln(f(x))=\ln(1+\ln x)^x$

$\ln(f(x))=x\ln(1+\ln x)$

$[\ln(f(x))]'=[x\ln(1+\ln x)]'$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(1+\ln x)+x\cdot\frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(1+\ln x)+\not{x}\cdot\frac{\frac{1}{\not{x}}}{1+\ln x}$$

$$f'(x)=\left[\ln(1+\ln x)+\frac{1}{1+\ln x}\right]f(x)$$

$f'(1)=\left(\ln(1+\underbrace{\ln 1}_{0})+\frac{1}{1+\ln 1}\right)\underbrace{f(1)}_{1}$, $f(1)=(1+\ln 1)^1=1$

$f'(1)=1$

$g'(x)=\left[\int_x^{f(x)} \cosh^2 t\,dt\right]'$,

$g'(x)=f'(x)\cosh^2(f(x))-1\cdot\cosh^2 x$

$g'(1)=\underbrace{f'(1)}_{1}\cdot\cosh^2(1)-\cosh^2 1$

$g'(1)=\cosh^2 1-\cosh^2 1=0$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: Kalkülüsün Temel Teoremini kullanarak, sürekli bir f fonksiyonu için $x>0$ olmak üzere eğer

$$\int_0^{x^2} f(t)dt = x\arctan x$$ ise $f(1)$ değerini bulunuz

$$\left[\int_0^{x^2} f(t)dt\right]' = \left[x\arctan x\right]'$$

$$2x f(x^2) = \arctan x + x\frac{1}{1+x^2}$$

$x=1$ için ($x>0$ olduğu için $x=-1$ olmaz.)

$$2\cdot f(1) = \arctan 1 + \frac{1}{2}$$

$$2f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

$$f(1) = \frac{\pi+2}{8}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Sürekli türevlenebilir bir F fonksiyonu, $x \geq 1$ olmak üzere $F(x) = \frac{1}{x} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t}) \right] dt$ denklemini sağlıyorsa $F'(1)$ değerini bulunuz.

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t}) \right] dt$$

$$\left[F(x)\right]' = \left[\frac{1}{x} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t}) \right] dt \right]'$$

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t}) \right] dt + \frac{1}{x} \cdot \left(2x \cdot \left(e^{1-\sqrt{x^2}} - F'(\sqrt{x^2}) \right) - 0 \right)$$

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t}) \right] dt + 2e^{1-x} - \frac{2}{x} F'(x)$$

$$F'(1) = -1 \cdot \underbrace{\int_1^1 \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t}) \right] dt}_{0} + 2\underbrace{e^{1-1}}_{e^0 = 1} - 2F'(1)$$

$$F'(1) = 2 - 2F'(1)$$

$$3F'(1) = 2$$

$$F'(1) = \frac{2}{3}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f(x) = -|x|$ fonksiyonunun $[-2,1]$ aralığındaki ortalama değerini hesaplayınız.

$$ort(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{1}{1-(-2)}\int_{-2}^{1} -|x|\,dx$$

$$= \frac{-1}{3}\int_{-2}^{1} |x|\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_0^1 x\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\left[-(0-\frac{4}{2}) + (\frac{1}{2}-0)\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}$$

$$= -\frac{5}{6}.$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f(x)=x^3+x$ eğrisinin altında x-ekseninin üzerinde ve $x=0$, $x=2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını üst Riemann Toplamı ile hesaplayınız.

I. yol: $f'(x)=3x^2+1$ artan fonksiyon

Üst Riemann Toplamı için sağ uç noktalar alınır.

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ (n eşit parçaya böldük)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\underbrace{\left(\frac{b-a}{n}\right)}_{\Delta x}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f\left(0+k\cdot\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{2k}{n}\right)^3+\left(\frac{2k}{n}\right)\right]\cdot\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k^3}{n^3}+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{16k^3}{n^4}+\frac{4k}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{16k^3}{n^4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{n^2}$$

$$= \frac{16}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$= \frac{16}{n^4}\cdot\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2+\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{4(n^4+2n^3+n^2)}{n^4}+\frac{2n^2+2n}{n^2}$$

$$\text{Alan} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 4\cdot\frac{(n^4+2n^3+n^2)}{n^4}+\frac{2n^2+2n}{n^2} = 4+2 = 6$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f(x) = 1 - x^2 e^{2-x}$ ile verilen f fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz.

$$f'(x) = -2x e^{2-x} - x^2 \cdot (-1) e^{2-x}$$

$$f'(x) = -2x e^{2-x} + x^2 e^{2-x}$$

$$f'(x) = (-2x + x^2) e^{2-x}$$

$f' = 0 \Rightarrow -2x + x^2 = 0 \Rightarrow x \cdot (x-2) = 0$, $x = 0$, $x = 2$ Kritik Nokta.

$$f''(x) = (-2 + 2x) e^{2-x} + (-2x + x^2) \cdot (-1) e^{2-x}$$

$$= e^{2-x} \cdot (-x^2 + 2x + 2x - 2)$$

$$= e^{2-x} \cdot (-x^2 + 4x - 2)$$

$x = 0$ noktası için

$f'(0) = 0$ ve $f''(0) = e^2 \cdot (-2) = -2e^2 < 0 \Rightarrow x = 0$ noktası yerel max noktadır.

$f(0) = 1$ fmin yerel max değeridir.

$x = 2$ noktası için.

$f'(2) = 0$ ve $f''(2) = e^0 \cdot (-4 + 8 - 2) = 2 > 0 \Rightarrow x = 2$ noktası yerel min noktadır.

$f(2) = 1 - 4e^0 = -3$ yerel minimum değerdir.

II yol:

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+

$x = 0$ yerel max nok., $x = 2$ yerel min nok.

$f(0) = 1$ max değer, $f(2) = -3$ min değer

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

a.)
Ör: $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x)=(1+\ln x)^x$ ise f fonksiyonunun

türevini bulunuz.

$f(x)=(1+\ln x)^x \Rightarrow \ln f(x) = \ln(1+\ln x)^x$

$\ln f(x) = x\ln(1+\ln x)$

$[\ln f(x)]' = [x\ln(1+\ln x)]'$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(1+\ln x) + x\cdot\frac{(1+\ln x)'}{1+\ln x}$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(1+\ln x) + x\cdot\frac{\frac{1}{x}}{1+\ln x}$

$f'(x) = \left(\ln(1+\ln x) + \frac{1}{1+\ln x}\right)\cdot(1+\ln x)^x$

b.) (a) şıkkında verilen f fonksiyonunu kullanarak

$g(x) = \int_x^{f(x)} (\cos^{12} t)\,dt$ ise $g'(1)$ değerini hesaplayınız

$g'(x) = f'(x)\cos^{12}(f(x)) - 1\cdot\cos^{12} x$

$g'(1) = f'(1)\cos^{12}(f(1)) - \cos^{12} 1$

$g'(1) = 1\cdot\cos^{12} 1 - \cos^{12} 1$

$g'(1) = \cos^{12}(1) - \cos^{12}(1) = 0$

NOT: $f(x)=(1+\ln x)^x \Rightarrow f(1) = (1+\ln 1)^1 = 1$

$f'(x) = \left(\ln(1+\ln x) + \frac{1}{1+\ln x}\right)\cdot(1+\ln x)^x$

$f'(1) = \left(\ln(1+\ln 1) + \frac{1}{1+\ln 1}\right)\cdot(1+\ln 1)^1 = 1\cdot 1 = 1$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Örn: $\int \sin^3 x \ln(\cos^2 x)\,dx = \int \sin^2 x \ln(\cos^2 x) \sin x\,dx$

$\cos x = t$

$-\sin x\,dx = dt$

$= \int (1-\cos^2 x) \ln(\cos^2 x) \sin x\,dx$

$= -\int (1-t^2) \ln t^7\,dt$

$= -7 \int (1-t^2) \ln t\,dt$

NOT 1: $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$ (kısmi integrasyondan)

$-7\int (1-t^2)\ln t\,dt = -7\int \ln t\,dt + 7\int t^2 \ln t\,dt$

$= -7(t\ln t - t) + 7\int t^2 \ln t\,dt$ (I_1)

$= -7(t\ln t - t) + 7\left(\frac{t^3}{3}\ln t - \frac{t^3}{9}\right) + C$

$= -7(\cos x \ln x - \cos x) + \frac{7}{9}\cos^3 x \ln\cos x - \frac{7}{9}\cos^3 x + C$

NOT 2: $I_1 = \int t^2 \ln t\,dt = \frac{t^3}{3}\ln t - \int \frac{t^2}{3}\,dt$

$\ln t = u$, $t^2 dt = dv$

$\frac{1}{t}dt = du$, $\frac{t^3}{3} = v$

$= \frac{t^3}{3}\ln t - \frac{1}{3}\frac{t^3}{3} + C$

$= \frac{t^3}{3}\ln t - \frac{t^3}{9} + C$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \int_0^x \cos t\,dt}{\int_0^x t\,dt - x\cos x} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \int_0^x \cos t\,dt}{\int_0^x t\,dt - x\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x + \int_0^x \cos t\,dt)'}{(\int_0^x t\,dt - x\cos x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x}{x - \cos x + x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{x - \cos x + x\sin x}$$

$$= \frac{2}{-1}$$

$$= -2$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x}, & 0<x\le 1\\ -1, & x=0\end{cases}$$

ile verilen f fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında Ortalama Değer Teoremi (O.D.T) uygulanabilir mi? Açıklayınız.

f, $[0,1]$ aralığında sürekli olmalı.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right).\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x.\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x^2-(1+x)}{x.\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{x.\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}\overset{x.(x-1)}{\longrightarrow}\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x}=-\frac{1}{2}\neq f(0)=-1$ olduğundan.

f, $x=0$ da sürekli değildir. Yani Ortalama Değer Teoremin hipotezlerinden biri sağlanmaz. O.D.T uygulanamaz.

t.me/matematikciler @Edeleyici31

Ör: $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall x > 0$ için

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonunu ve a sayısını bulunuz.

$$\left(6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt\right)' = \left(2\sqrt{x}\right)'$$

$a \in \mathbb{R}$ olduğu için $a' = 0$ dır

$$0 + 1 \cdot \left(\frac{f(x)}{x^2}\right) - a' \cdot \frac{f(a)}{a^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} \qquad \left(f(t) = \frac{t^2}{\sqrt{t}}\right)$$

$$6 + \int_a^x \frac{t^2}{\sqrt{t} \cdot t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$$

$$6 + \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{x} \Rightarrow 6 + \int_a^x t^{-1/2}\,dt = 2\sqrt{x}$$

$$6 + \frac{t^{1/2}}{1/2}\Big|_a^x = 2\sqrt{x} \Rightarrow 6 + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{a} = 2\sqrt{x}$$

$$6 = 2\sqrt{a}$$

$$3 = \sqrt{a}$$

$$\boxed{9 = a}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: Belirli integralin özelliğini/özelliklerini kullanarak

$\int_1^4 \sqrt{1+3x^2}\,dx$ integrali için mümkün olan

alt ve üst sınırları bulunuz

$f(x)=\sqrt{1+3x^2}$ fonksiyonu $[1,4]$ aralığında sürekli dir Bu aralıkta bir mutlak maksimum ve bir mutlak minimum değer alır.

$\min f(x)=f(1)=\sqrt{4}=2.$

$\max f(x)=f(4)=\sqrt{49}=7$

Belirli integraller için Max-Min eşitsizliği gereği

$$\min f(x).(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f(x).(b-a)$$

$$\min f(x).(4-1) \le \int_1^4 \sqrt{1+3x^2}\,dx \le \max f(x).(4-1)$$

$$2.3 \le \int_1^4 \sqrt{1+3x^2}\,dx \le 7.3$$

$$6 \le \int_1^4 \sqrt{1+3x^2}\,dx \le 21$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f(x)=\arcsin x+\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunu

$[0,1]$ aralığında Rolle Teoreminin

hipotezlerini sağladığını gösteriniz

ve ilgili c sayılarını bulunuz.

i) $f(x)=\arcsin x+\frac{\pi}{2}\sqrt{1-x^2}$, $[0,1]$ de sürekli

ii) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{2-\pi x}{\sqrt{1-x^2}}$, $(0,1)$ de türevli

iii.) $f(0)=\arcsin 0+\frac{\pi}{2}=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

$f(1)=\arcsin 1+0=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$

$f(0)=f(1)$ ✓

i.), ii) ve iii) koşulları sağlandığı için Rolle Teoremi hipotezlerini sağlar.

$f'(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c\in(0,1)$ vardır

$f'(c)=\frac{2-\pi c}{\sqrt{1-c^2}}=0 \Rightarrow 2-\pi c=0 \Rightarrow c=\frac{2}{\pi}\in(0,1)$ dir

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$ ile tanımlı f fonksiyonunun tanım kümesini; artan ve azalan olduğu aralıkları; varsa asimptotlarını; varsa ekstremum değerlerini; varsa bükülme(dönüm) noktalarını bulunuz ve konkavlığını inceleyiniz. Tüm sonuçlarını tek bir tabloda göstererek f nin grafiğini çiziniz.

Tanım Kümesi: $\mathbb{R}-\{2\}$.

$x=2$ Düşey Asimptot ($\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2}{x-2}=+\infty$, $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$)

$x^2 : (x-2) = x+2$, kalan $2x$, sonra $2x-4$, kalan 4 $\Rightarrow$ **$y=x+2$ eğik asimptot**, yatay asimptot yok.

$f'(x)=\frac{2x.(x-2)-x^2.1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

$f'=0 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0, x=4$. Kritik Noktalar

f' tanımsız $\Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$ (çift kat) Kritik Nokta Değil.

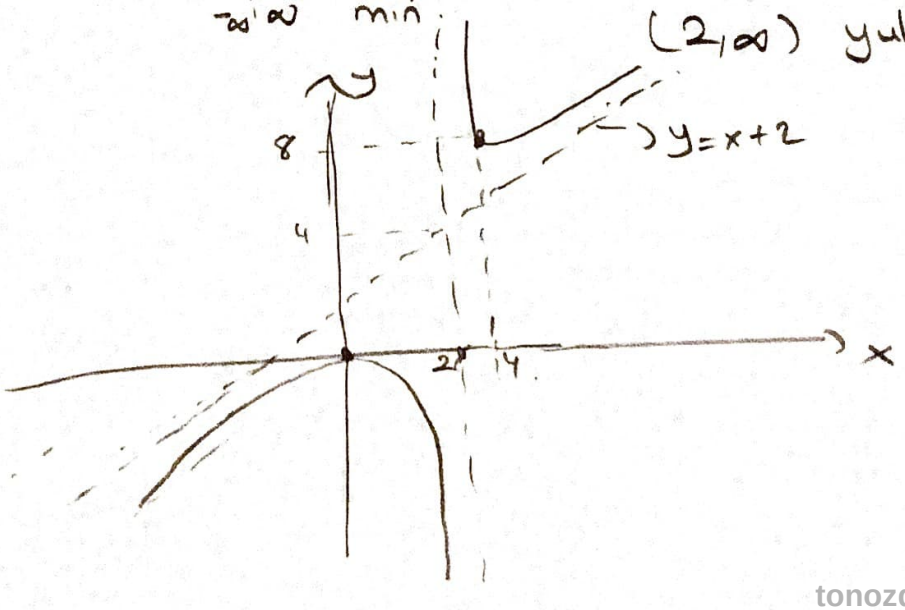
$x=2$ düşey asimptot

$f''(x)=\frac{(2x-4).(x-2)^2-(x^2-4x)2.(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{8}{(x-2)^3}$

$f''=0 \Rightarrow (x-2)^3=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$		0		2		4	
f'		+	0	−	T.Sız	−	0	+
f''		−		−	0	+		+
		max.			$-\infty$ ∪ ∞		min.	

* (0,0) yerel maximum.
  (4,8) yerel minimum
* $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$ artan
  $(0,2)\cup(2,4)$ azalan.
* $(-\infty,2)$ aşağı konkav.
  $(2,\infty)$ yukarı konkav.



tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$ ile tanımlı f fonksiyonunun tanım kümesini; yatay, düşey ve eğik asimptotlarını; artan ve azalan olduğu aralıkları, ekstremum noktalarını, konkavlığını ve bükum (dönüm) noktalarını inceleyiniz. Tüm sonuçları tek bir tabloda göstererek f nin grafiğini çiziniz.

Tanım kümesi
$D(f): \mathbb{R}-\{-1,1\}$

Düşey asimptot i $x=-1$, $x=1$ $\Rightarrow$

$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-4}{x^2-1}=+\infty$, $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-4}{x^2-1}=-\infty$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4}{x^2-1}=+\infty$, $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4}{x^2-1}=-\infty$

$\lim_{x\to \mp\infty} \frac{x^2-4}{x^2-1}=1 \Rightarrow y=1$ yatay asimptot, Eğik asimptot yok

$f'(x)=\frac{2x.(x^2-1)-(x^2-4).2x}{(x^2-1)^2}=\frac{6x}{(x^2-1)^2}$ → $x=0$ Kritik Nokta.

→ $x=\mp 1 \notin D(f)$ (x=∓1 düşey asimptot)

$x=\mp 1$ çift kat Kritik Nokta değil

$f''(x)=\frac{6.(x^2-1)^2-6x.2.(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4}=\frac{-6-18x}{(x^2-1)^3}$ → $x=\mp 1 \notin D(f)$.

Bükum Noktası Yok!

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		−	∄	−	0	+	∄	+	
f''		−	0	+	|	+	∄	−	
f		↘	∄	↘	x=0 yerel min	↗	∄	↗	

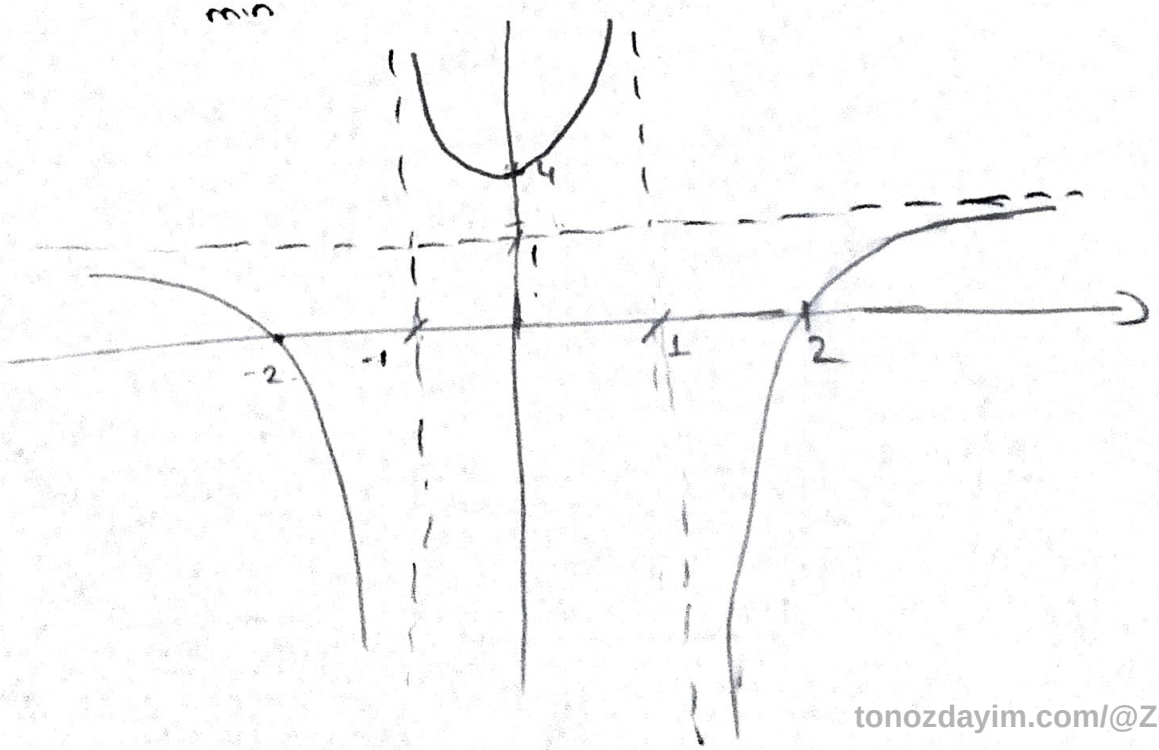
$(0,1)\cup(1,\infty)$ artan

$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ azalan

$(-1,1)$ yukarı konkav

$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ aşağı konkav

$(0,4)$ yerel minimum



tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$ ile verilen fonksiyonunun tanım aralığını; varsa düşey, yatay ve eğik asimptotlarını; artan-azalan olduğu aralıkları ve varsa ekstremum değerlerini; aşağı ve yukarı konkav olduğu aralıkları ve varsa bükülme noktalarını bularak grafiğini çiziniz

$D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

$x=1$ düşey asimptot $\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{1-x} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{1-x} = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \pm\infty$ yatay asimptot yok

Eğik asimptot: $y=mx+n \Rightarrow \begin{cases} m=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x\cdot(1-x)} = -1 \\ n=\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2}{1-x}+x\right] \\ \quad = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x} = -1 \end{cases}$

$\&$

$y=mx+n \Rightarrow y=-x-1$ eğik asimptot

$f'(x)=\frac{2x\cdot(1-x)+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \Rightarrow$

$f'=0 \Rightarrow 2x-x^2=0$, $x=0, x=2$ Kritik Nokta

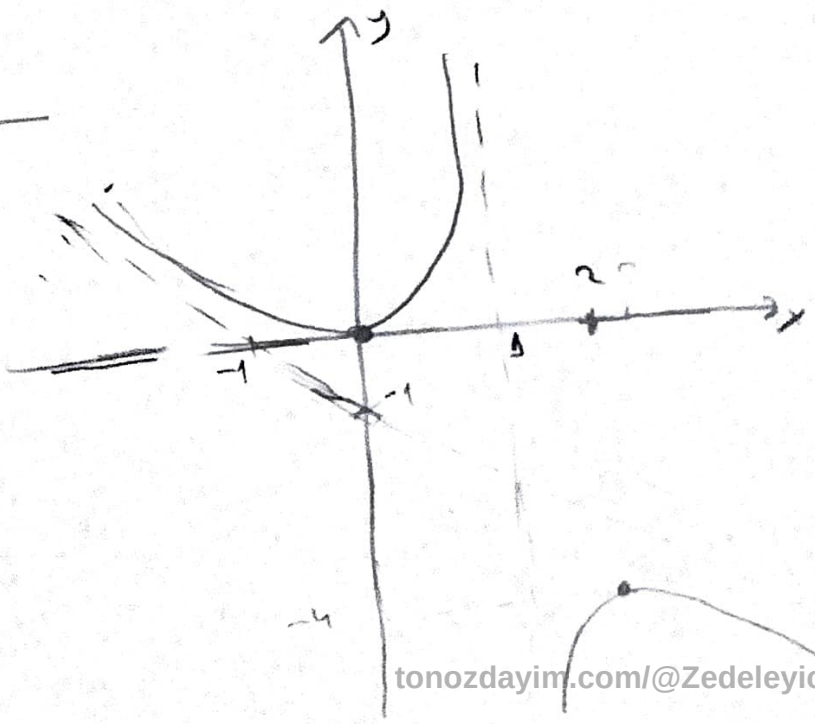
f' tanımsız $\Rightarrow (1-x)^2=0$, $x=1$ ~~Kritik Nokta değil~~ çünkü kat

$x=1$ düşey asimptot

$f''(x)=\frac{(2-2x)(1-x)^2-(2x-x^2)\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4}=\frac{2}{(1-x)^3}$

$\sim x=1 \notin D(f)$ bükülme noktası değil

x	$-\infty$		0		1		2	
f'		$-$	0	$+$	tanımsız	$+$	0	$-$
f''		$+$		$+$		$-$		$-$
f		↘	$x=0$ yerel min $f(0)=0$	↗		↗	$x=2$ yerel max $f(2)=-4$	↘



tonozdayim.com/@Zedeleyici31

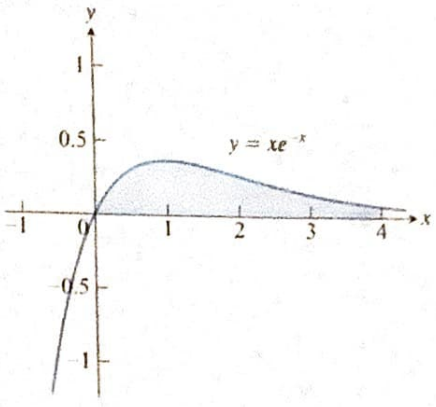
Belirli İntegralleri Kısmi İntegrasyonla Hesaplamak

Belirli integralleri kısmi integrasyonla hesaplamak için Denklem (1)'deki kısmi integrasyon formülü ile Temel Teorem, Kısım 2 birleştirilebilir. f' ve g''nün her ikisinin de $[a, b]$ aralığında sürekli olduğunu kabul edersek Temel Teorem, Kısım 2 aşağıdaki sonucu verir.

Belirli İntegraller İçin Kısmi İntegrasyon Formülü

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{3}$$

Denklem (3)'ü uygularken normalde Denklem (2)'deki u ve v notasyonlarını kullanırız, çünkü hatırlaması daha kolaydır. Buna bir örnek verelim.



ŞEKİL 8.1 Örnek 6'daki bölge.

ÖRNEK 6 $x = 0$'dan $x = 4$'e kadar $y = xe^{-x}$ eğrisi ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm Bölge Şekil 8.1'de taralı alan olarak gösterilmiştir. Alanı şöyledir:

$$\int_0^4 xe^{-x}\,dx.$$

$u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, $v = -e^{-x}$ ve $du = dx$ olsun. O halde;

$$\begin{aligned}\int_0^4 xe^{-x}\,dx &= -xe^{-x}\Big]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})\,dx \\ &= [-4e^{-4} - (0)] + \int_0^4 e^{-x}\,dx \\ &= -4e^{-4} - e^{-x}\Big]_0^4 \\ &= -4e^{-4} - e^{-4} - (-e^0) = 1 - 5e^{-4} \approx 0.91.\end{aligned}$$

İntegrasyon Tablosu

f'nin peş peşe türevinin alınabildiği (sıfır olacak şekilde) ve g'nin zorlanmadan integralinin alınabildiği $\int f(x)g(x)\,dx$ biçimindeki integrallerin kısmi integrasyon için doğal adaylar olduklarını gördük. Ancak çok fazla tekrar gerekiyorsa hesaplamalar kullanışsız hale gelebilir, ya da tekrar eden kısmi bir integrasyon için seçtiğiniz dönüşümler sonunda size bulmak istediğiniz başlangıçtaki integrale ulaştırabilir. Bu gibi durumlarda hesaplamaları düzenleyerek zorluklardan kurtarıp işi çok daha kolay hale getiren bir yol vardır. Buna **integrasyon tablosu** denir ve aşağıdaki örneklerde açıklanmaktadır.

ÖRNEK 7 Aşağıdaki integrali hesaplayınız:

$$\int x^2e^x\,dx.$$

Çözüm $f(x) = x^2$ ve $g(x) = e^x$ ile listeyi oluştururuz.

$f(x)$ ve türevleri		$g(x)$ ve integralleri
x^2	(+) →	e^x
$2x$	(−) →	e^x
2	(+) →	e^x
0		e^x

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Oklarla birbirine bağlanmış fonksiyonların çarpımlarını okların üzerindeki işaretlere göre birbirlerine ekleyerek aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Bu sonucu Örnek 3'teki sonuçla karşılaştırınız. ■

ÖRNEK 8 Aşağıdaki integrali hesaplayınız:

$$\int x^3 \sin x\,dx.$$

Çözüm $f(x) = x^3$ ve $g(x) = \sin x$ ile listeyi oluştururuz.

$f(x)$ ve türevleri		$g(x)$ ve integralleri
x^3	(+)	$\sin x$
$3x^2$	(−)	$-\cos x$
$6x$	(+)	$-\sin x$
6	(−)	$\cos x$
0		$\sin x$

Yine oklarla birbirine bağlanmış fonksiyonların çarpımlarını okların üzerindeki işaretlere göre birbirlerine ekleyerek aşağıdaki sonucu elde ederiz;

$$\int x^3 \sin x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C.$$ ■

Bu bölümün sonundaki Ek Alıştırmalar, ne f ne de g'nin peş peşe türevleri alınarak sıfırlanamadığı durumlarda integrasyon tablosunun nasıl kullanılabileceğini göstermektedir.

Alıştırmalar 8.1

Kısmi İntegrasyon

Alıştırma 1–24'te, integralleri kısmi integrasyonla hesaplayınız.

1. $\int x \sin \frac{x}{2}\,dx$
2. $\int \theta \cos \pi\theta\,d\theta$
3. $\int t^2 \cos t\,dt$
4. $\int x^2 \sin x\,dx$
5. $\int_1^2 x \ln x\,dx$
6. $\int_1^e x^3 \ln x\,dx$
7. $\int xe^x\,dx$
8. $\int xe^{3x}\,dx$
9. $\int x^2e^{-x}\,dx$
10. $\int (x^2 - 2x + 1)e^{2x}\,dx$
11. $\int \tan^{-1} y\,dy$
12. $\int \sin^{-1} x\,dx$
13. $\int x \sec^2 x\,dx$
14. $\int 4x \sec^2 2x\,dx$
15. $\int x^3e^x\,dx$
16. $\int p^4e^{-p}\,dp$
17. $\int (x^2 - 5x)e^x\,dx$
18. $\int (r^2 + r + 1)e^r\,dr$
19. $\int x^5e^x\,dx$
20. $\int t^2e^{4t}\,dt$
21. $\int e^\theta \sin\theta\,d\theta$
22. $\int e^{-y}\cos y\,dy$
23. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$
24. $\int e^{-2x}\sin 2x\,dx$

Değişken Dönüşümlerini Kullanmak

Alıştırma 25–30'da, integralleri kısmi integrasyondan önce bir değişken dönüşümü kullanarak hesaplayınız.

25. $\int e^{\sqrt{3s+9}}\,ds$
26. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

$n = 1$ ve $a = 1$ ile;

$$\int x \sin^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Daha sonra sağ taraftaki integrali bulmak için Formül 49'u kullanırız:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$a = 1$ ile,

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C.$$

Sonuçlar birleştirildiğinde;

$$\int x \sin^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \sin^{-1} x + \frac{1}{4} x\sqrt{1 - x^2} + C'.$$

İndirgeme Formülleri

Tekrarlı kısmi integrasyon yöntemi için gereken süre bazen indirgeme formülleriyle aşağıdaki gibi kısaltılabilir.

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n - 1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx \tag{1}$$

$$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx \tag{2}$$

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m + n} + \frac{n - 1}{m + n} \int \sin^{n-2} x \cos^m x\, dx \qquad (n \neq -m). \tag{3}$$

Böyle bir formülü peş peşe kullanarak orijinal integrali sonunda daha düşük kuvvetli ve doğrudan hesaplanabilir bir integral olarak ifade ederiz. Aşağıdaki örnek bu yöntemi açıklamaktadır.

ÖRNEK 4 Aşağıdaki integrali bulunuz:

$$\int \tan^5 x\, dx.$$

Çözüm $n = 5$ ile Denklem (1)'i kullanırız;

$$\int \tan^5 x\, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan^3 x\, dx.$$

Daha sonra Denklem (1)'i tekrar $n = 3$ ile kullanıp kalan integrali hesaplarız;

$$\int \tan^3 x\, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \int \tan x\, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

Sonuçlar birleştirildiğinde;

$$\int \tan^5 x\, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C'.$$

İntegral biçimlerinin gösterdiği gibi, indirgeme formülleri kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak elde edildi. (Bkz. Bölüm 8.1, Örnek 5.)

tonozdayim.com/@Zedeleyici31



8
İNTEGRASYON TEKNİKLERİ

GENEL BAKIŞ Temel Teorem, bir integrand fonksiyonunun ters türevini bildiğimizde belirli integrali nasıl hesaplayacağımızı gösterir. Tablo 8.1 şimdiye kadar çalıştığımız fonksiyonların ters türevlerinin formlarını özetlemektedir ve tablodaki bu basit formülleri değişken dönüşümü yöntemleriyle kullanarak daha karmaşık formülleri hesaplamamız mümkün olmaktadır. Bu bölümde daha başka önemli teknikleri öğreneceğiz; böylece ters türevleri şimdiye kadar gösterilen yöntemlerle bulunamayan birçok fonksiyon bileşimlerinin ters türevlerini (yada belirsiz integralleri) bulabileceğiz.

TABLO 8.1 Temel integrasyon formülleri

1. $\int k\,dx = kx + C$ (k herhangi bir sayı)
2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$
5. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
10. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
11. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
12. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$
13. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$
14. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
15. $\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
16. $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
17. $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$
19. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$
20. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left|\dfrac{x}{a}\right| + C$
21. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$
22. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C \qquad (x > a > 0)$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Bilinmeyen integral şimdi eşitliğin her iki yanında da görünmektedir. Her iki tarafa integral eklenip ve integral sabitini yazıldığında,

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C_1$$

sonucunu verir, 2 ile bölüp integral sabitini yeniden yazdığımızda;

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C. \quad \blacksquare$$

ÖRNEK 5 Aşağıdaki integrali

$$\int \cos^n x\,dx$$

$\cos x$'in daha düşük kuvvetinin integrali olarak ifade eden bir indirgeme formülü bulunuz.

Çözüm $\cos^n x$ ifadesini $\cos^{n-1} x \cdot \cos x$ olarak düşünebiliriz. O zaman

$$u = \cos^{n-1} x \qquad \text{ve} \qquad dv = \cos x\,dx$$

olarak aldığımızda

$$du = (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\sin x\,dx) \qquad \text{ve} \qquad v = \sin x$$

olur. Böylece kısmi integrasyon

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\,dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int (1 - \cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx\end{aligned}$$

sonucunu verir. Eşitliğin her iki yanına

$$(n-1)\int \cos^n x\,dx$$

eklersek,

$$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx$$

elde ederiz. Daha sonra her iki tarafı n ile bölerek aşağıdaki sonuca ulaşırız;

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx. \quad \blacksquare$$

Örnek 5'te elde edilen formüle **indirgeme formülü** denir, çünkü bir fonksiyonun belli bir kuvvetini içeren bir integrali, aynı formda ama indirgenmiş bir kuvvetini içeren başka bir integrale dönüştürür. n pozitif bir tamsayı olduğunda, kalan integral kolayca hesaplanabilir hale gelene kadar formülü peş peşe uygularız. Örneğin, Örnek 5'teki sonuç bize şunu söylemektedir;

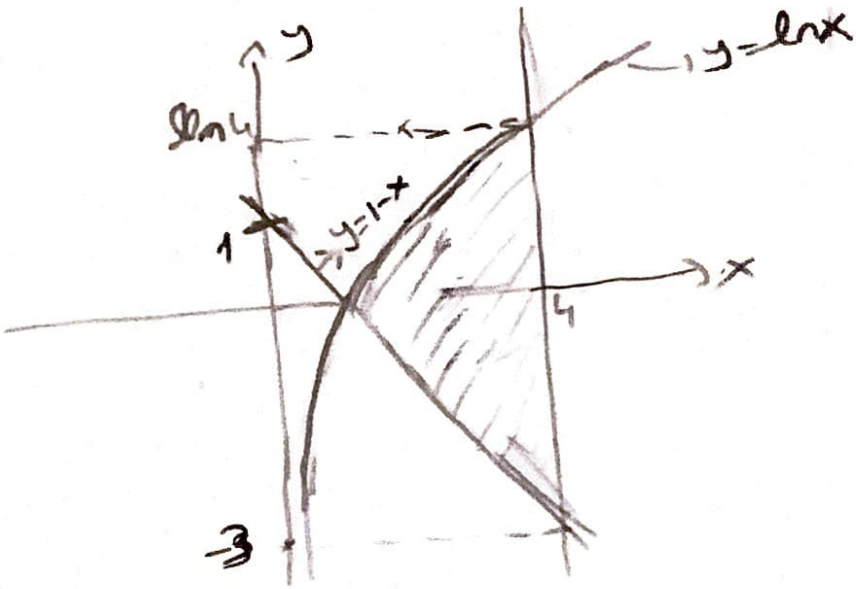
$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx \\ &= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $y=\ln x$ eğrisi ve $y=1-x$, $x=4$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını veren integral:

i) x'e göre integral ile

ii) y'ye göre integral ile yazınız (integral hesaplama yapacak)



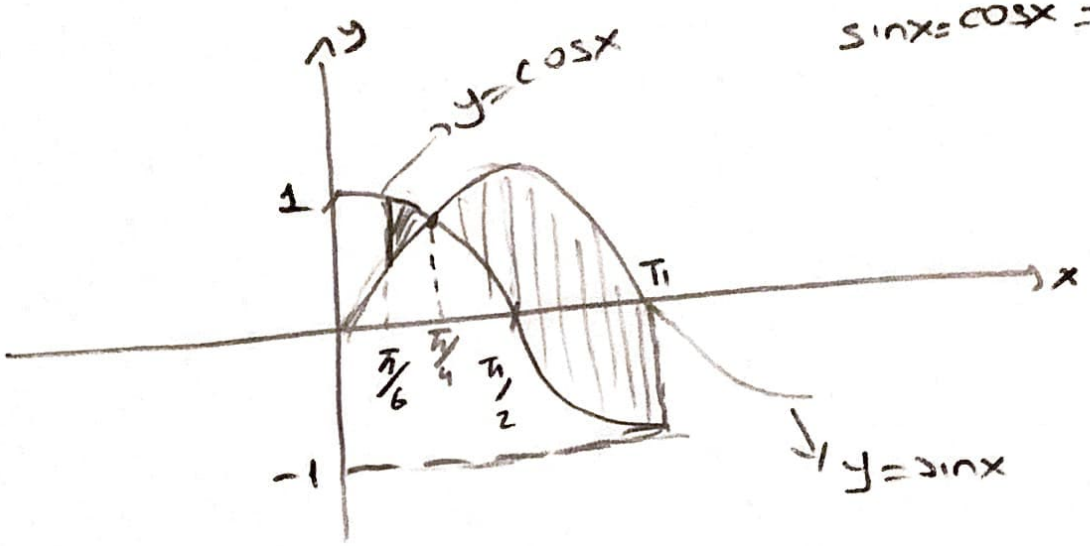
i) $\text{Alan} = \int_1^4 [\ln x - (1-x)]\,dx$

ii) $\text{Alan} = \int_0^{\ln 4} (4-e^y)\,dy + \int_{-3}^{0} [4-(1-y)]\,dy$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\frac{\pi}{6} \le x \le \pi$ olmak üzere $y=\sin x$ ve $y=\cos x$ eğrileri arasındaki bölgenin alanını hesaplayınız.

$\sin x = \cos x \Rightarrow x = \pi/4$



$$\text{Alan} = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx$$

$$= \sin x + \cos x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} \cdot - \cos x - \sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right) - \cos\pi - \sin\pi + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2} - \frac{(1+\sqrt{3})}{2}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: R; $x=y^2$ eğrisi ve $y-x=-2$ doğrusu ile sınırlı bölge olsun.

i.) R bölgesini çiziniz ve R nin alanını veren belirli integrali x'e göre integral ile yazınız

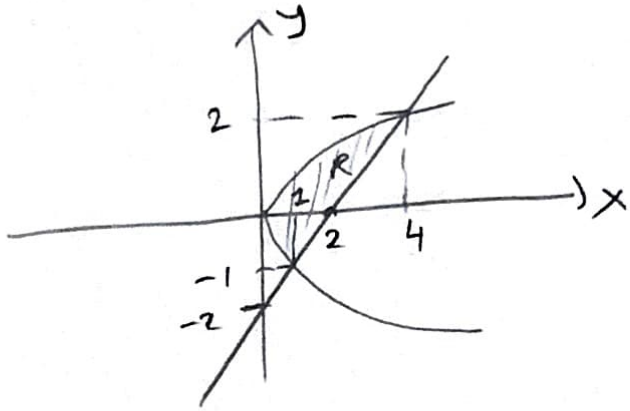
ii.) R bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren belirli integrali <u>pul yöntemini</u> kullanarak yazınız integrali hesaplamayınız.

$y=x-2$ } $y=y^2-2$
$x=y^2$ } $y^2-y-2=0$

$y \quad -1 \quad 2$
$+ \quad - \quad +$

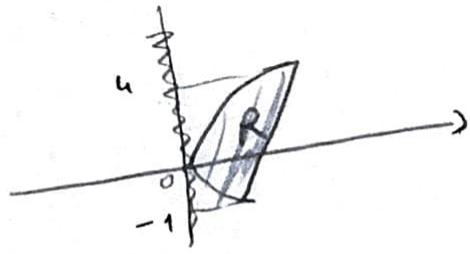
$y=2$
$y=-1$

i.)



$$V=\int_0^1 \left(\sqrt{x}-(-\sqrt{x})\right)dx+\int_1^4 \left(\sqrt{x}-(x-2)\right)dx$$

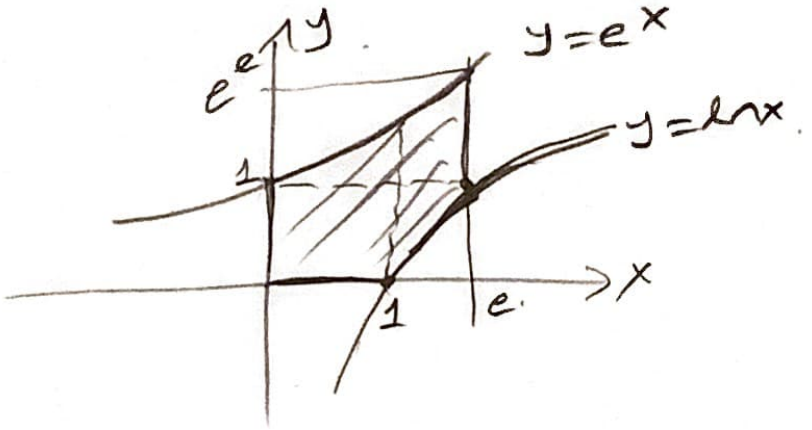
ii.)



$$V=\int_{-1}^{4} \pi\cdot\left[(4+2)^2-(y^2)^2\right]dy$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $y=\ln x$, $y=e^x$ eğrilerinin $x=0$, $y=0$ ve $x=e$ doğrularıyla sınırladığı bölgenin alanını x'e bağlı belirli integral ile ifade ediniz integrali hesaplamayınız



$$\text{Alan} = \int_0^1 e^x dx + \int_1^e (e^x - \ln x)\, dx$$

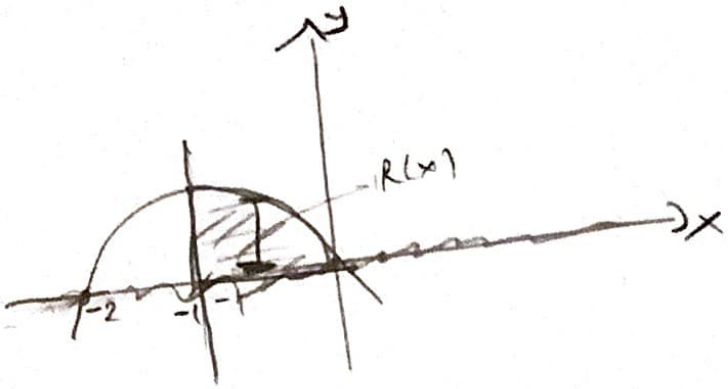
y-ye bağlı integral ile

$$\text{Alan} = \int_0^1 e^y dy + \int_1^{e^e} (e - \ln y)\, dy$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

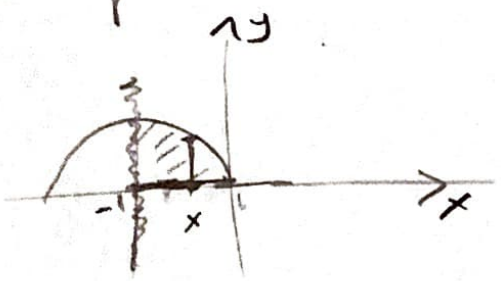
ön: $y = -x^2 - 2x$, $x \geq -1$ ve $y = 0$ ile sınırlı bölgenin

i.) x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini Disk yöntemiyle bulunuz. (İntegrali hesaplamayınız)



$$V = \int_{-1}^{0} \pi . \left[(-x^2-2x)^2 \right] dx$$ $\left[R(x)\right]^2$

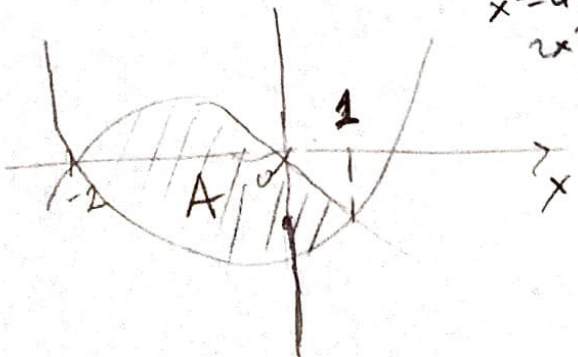
ii) $x = -1$ ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini silindirik kabuk metoduyla bulunuz (İntegrali hesaplamayınız)



$$V = \int_{-1}^{0} 2\pi . (x-(-1)) . (-x^2-2x)\, dx$$

$$V = \int_{-1}^{0} 2\pi . (x+1) . (-x^2-2x)\, dx$$

iii.) $y = x^2 - 4$ ve $y = -x^2 - 2x$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını veren integrali yazınız hesaplamayınız.



$x^2 - 4 = -x^2 - 2x$

$2x^2 + 2x - 4 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$

$+2 \quad -1$

$x \quad x$

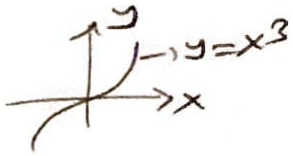
$$\text{Alan} = A = \int_{-2}^{1} \left[(-x^2-2x) - (x^2-4) \right] dx$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

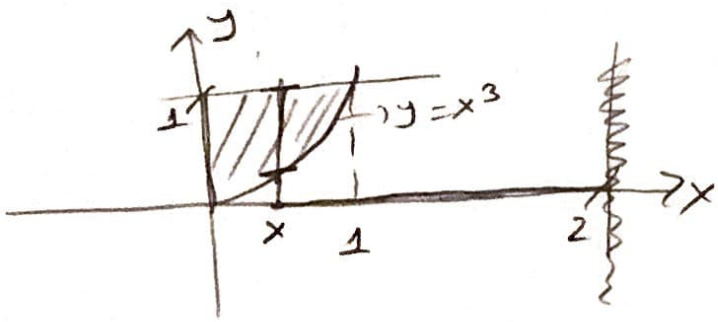
Ör: $y=x^3$ eğrisi, $y=1$ doğrusu ve $x=0$ doğrusu ile sınırlı bölgenin $x=2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini

a.) Silindirik kabuk yöntemi ile.

b.) Pul yöntemiyle hesaplayınız



a.)



$$V=\int_0^1 2\pi\cdot(2-x)\cdot(1-x^3)\,dx$$

$$=\int_0^1 2\pi\cdot(2-2x^3-x+x^4)\,dx=2\pi\left[2x-\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right]=\frac{12\pi}{5}$$

b.) $$V=\int_0^1 \pi\cdot\left[(2)^2-(2-\sqrt[3]{y})^2\right]dy=\int_0^1 \pi\cdot(4-(4+y^{2/3}-4y^{1/3}))dy$$

$$=\pi\int_0^1 (4y^{1/3}-y^{2/3})\,dy=\pi\left[\frac{4\cdot 3}{4}y^{4/3}-\frac{3}{5}y^{5/3}\Big|_0^1\right]$$

$$=\pi\cdot\left[3-\frac{3}{5}\right]$$

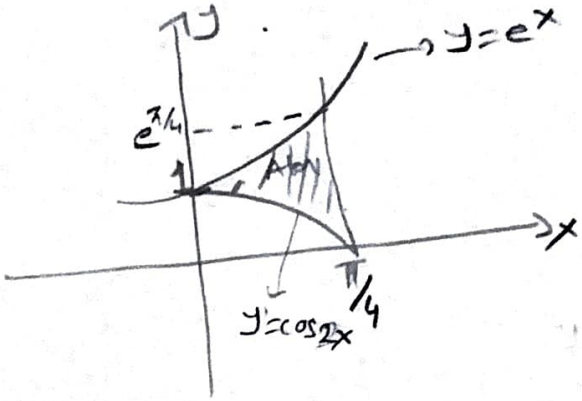
$$=\frac{12\pi}{5}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: R bölgesi $y=e^x$, $y=\cos 2x$ eğrileri ve $x=\frac{\pi}{4}$ doğrusu ile sınırlı bir bölge olsun.

a.) R bölgesinin alanını veren belirli integrali "y'ye göre integral" ile belirleyiniz (integrali hesaplamayınız)

Bölgeyi çiziniz.



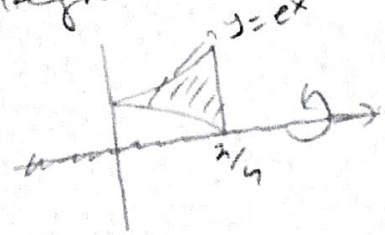
$y=\cos 2x \Rightarrow 2x=\arccos y$

$x=\frac{\arccos y}{2}$

$y=e^x \Rightarrow x=\ln y$

$$\text{Alan}=\int_0^1 \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\arccos y}{2}\right)dy+\int_1^{e^{\pi/4}}\left(\frac{\pi}{4}-\ln y\right)dy$$

b.) Pul yöntemi kullanarak R bölgesinin x-ekseri etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren belirli integrali belirleyiniz (integrali hesaplamayınız) (Bölgeyi çiziniz)

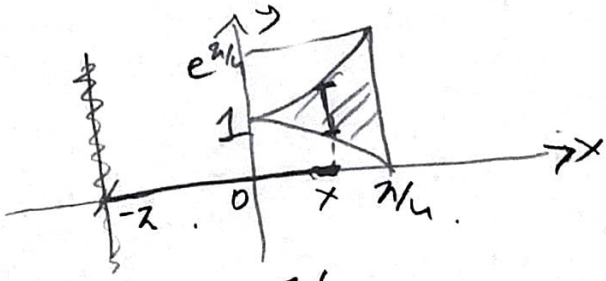


$$V=\int_0^{\pi/4}\pi\cdot\left[(e^x)^2-(\cos 2x)^2\right]dx$$

$$=\int_0^{\pi/4}\pi\left[e^{2x}-\cos^2 2x\right]dx$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

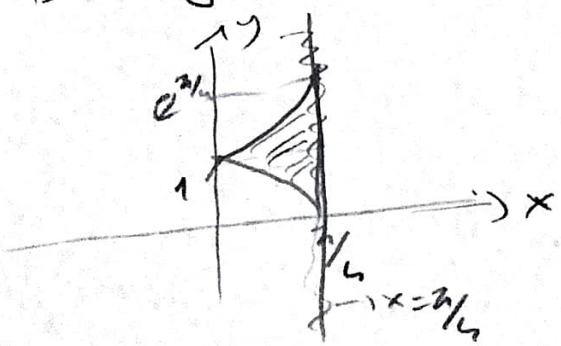
c.) Kabuk yöntemini kullanarak R bölgesinin $x=-\pi$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren belirli integrali belirleyiniz (İntegrali hesaplamayınız) (Bölgeyi çiziniz)



$$V = 2\pi \int_0^{\pi/4} (x-(-\pi)) \cdot (e^x - \cos 2x)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} (x+\pi) \cdot (e^x - \cos 2x)\, dx$$

d.) Disk yöntemini kullanarak R bölgesinin $x=\frac{\pi}{4}$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren belirli integrali belirleyiniz (İntegrali hesaplamayınız) (Bölgeyi çiziniz)



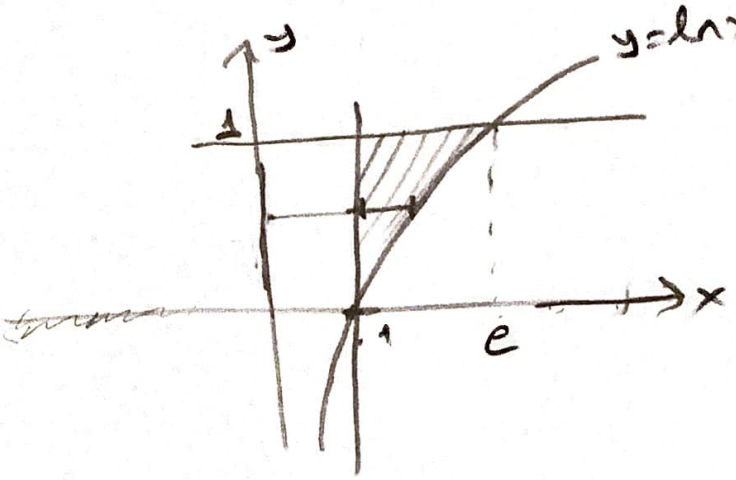
$$V = \int_0^1 \pi \cdot 0 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\arccos y}{2}\right]^2 dy + \int_1^{e^{\pi/4}} \pi \cdot \left[\frac{\pi}{4} - \ln y\right]^2 dy$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $y=\ln x$ eğrisi $x=1$ ve $y=1$ doğruları ile sınırlı bölgenin

a.) alanını

b.) x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini hesaplayınız.



a.) Alan $= \int_1^e (1-\ln x)\,dx = x-(x\ln x - x)\Big|_1^e$

$= 2x - x\ln x \Big|_1^e$

$= 2e - e\ln e - 2 + 1\ln 1$

$= 2e - e - 2 + 0$

$= e-2$

b.) Hacim: $V = 2\pi \int_0^1 y\cdot(e^y-1)\,dy$

Türev	İntegral
y	$+e^y$
1	$-e^y$
0	e^y
	$+e^y$

$= 2\pi \int_0^1 (ye^y - y)\,dy$

$= 2\pi \left[ye^y - e^y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \right] = 2\pi\left[(e-e-\frac{1}{2})-(-1)\right]$

$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$

Çözdüyüm.com/@Zedeleyici31

Ön: $\int \frac{\cos^3 t \, dt}{\sin^3 t - \sin^2 t - 6\sin t}$ integralini hesaplayınız.

$\sin t = u \Rightarrow \cos t \, dt = du$

$$I = \int \frac{\cos^3 t \, dt}{\sin^3 t - \sin^2 t - 6\sin t} = \int \frac{(1-\sin^2 t)\, du}{\cos^2 t \cdot \cos t \, dt \cdot (u^3 - u^2 - 6u)}$$

$$= \int \frac{(1-u^2)\, du}{u^3 - u^2 - 6u}$$

$$\frac{1-u^2}{u^3-u^2-6u} = \frac{1-u^2}{u(u-3)(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-3} + \frac{C}{u+2}$$

$u^3 - u^2 - 6u = u(u^2 - u - 6)$

u, u, -3, $+2$

Kapama yöntemiyle $A = \frac{1}{-3 \cdot 2} = \frac{-1}{6}$

$B = \frac{1-9}{3 \cdot 5} = \frac{-8}{15}$

$C = \frac{1-4}{-2 \cdot -5} = \frac{-3}{10}$

$$\frac{1-u^2}{u^3-u^2-6u} = \frac{-1}{6u} - \frac{8}{15(u-3)} - \frac{3}{10(u+2)}$$

$$\int \frac{(1-u^2)\, du}{u^3-u^2-6u} = \int \left[\frac{-1}{6u} - \frac{8}{15(u-3)} - \frac{3}{10(u+2)} \right] du$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|u| - \frac{8}{15}\ln|u-3| - \frac{3}{10}\ln|u+2| + C.$$

* $\sin t = u$ olduğundan

$$I = -\frac{1}{6}\ln|\sin t| - \frac{8}{15}\ln|\sin t - 3| - \frac{3}{10}\ln|\sin t + 2| + C$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

ör: $\int \frac{e^t}{e^{3t}-e^{2t}+2e^t-2}\,dt$ integralini hesaplayınız.

$e^t=u \Rightarrow e^t dt=du$.

$$I=\int \frac{e^t dt}{e^{3t}-e^{2t}+2e^t-2}=\int \frac{du}{u^3-u^2+2u-2}$$

$u^2.(u-1)+2.(u-1)$

$$=\int \frac{du}{(u-1).(u^2+2)}$$

$$\frac{1}{(u-1).(u^2+2)}=\frac{A}{u-1}+\frac{Bu+C}{u^2+2} \Rightarrow \begin{cases} 1=A.(u^2+2)+(Bu+C).(u-1) \\ 1=Au^2+2A+Bu^2-Bu+Cu-C \\ 1=(A+B)u^2+(C-B)u+2A-C \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-B=0 \\ 2A-C=1 \end{cases} \Rightarrow 3A=1 \quad A=1/3, \quad B=-1/3, \; C=-1/3$$

$$\frac{1}{(u-1).(u^2+2)}=\frac{1}{3.(u-1)}+\frac{-u-1}{3.(u^2+2)}$$

$$\int \frac{du}{(u-1).(u^2+2)}=\int \left\{\frac{1}{3.(u-1)}-\frac{1}{3}.\frac{(u+1)}{u^2+2}\right\}du=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u-1}-\frac{1}{3}.\int\frac{(u+1)du}{u^2+2}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|u-1|-\frac{1}{3}.\int\frac{u.du}{u^2+2}-\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2+2}.$$

* $e^t=u$ olduğundan $\Rightarrow$

$$=\frac{1}{3}\ln|u-1|-\frac{1}{6}\ln|u^2+2|-\frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}+C$$

$$I=\int \frac{e^t dt}{e^{3t}-e^{2t}+2e^t-2}=\frac{1}{3}\ln|e^t-1|-\frac{1}{6}\ln|e^{2t}+2|-\frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{e^t}{\sqrt{2}}+C$$

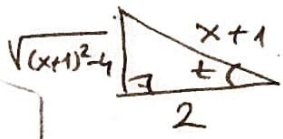
tonozdayim.com/@Zedeleyici31

ör: $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x-3}}$ $(x>1)$ integralini hesaplayınız

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x-3}} = \int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{(x+1)^2-4}}$$

$x+1 = 2\sec t$

$dx = 2\sec t \cdot \tan t\, dt$



$$= \int \frac{2\sec t \tan t\, dt}{(2\sec t)^3\sqrt{4\sec^2 t - 4}}$$

$4(\sec^2 t - 1)$

$4\tan^2 t$

$x+1 = 2\sec t$

$\sec t = \frac{x+1}{2}$

$t = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

$$= \int \frac{2\sec t \tan t\, dt}{8\sec^3 t \cdot 2\tan t}$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{dt}{\sec^2 t}$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right] + C.$$

$$= \frac{1}{16}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{32}\cdot 2\sin t\cos t$$

$\sqrt{x^2+2x-3}$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{16}\cdot\frac{\sqrt{(x+1)^2-4}}{x+1}\cdot\frac{2}{x+1} + C$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Örn: $y=\ln(\sin x)$ eğrisinin $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$ aralığında kalan yayının uzunluğunu hesaplayınız

$$L=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$y=\ln(\sin x)$, $y'=\frac{dy}{dx}$

$y'=\frac{\cos x}{\sin x}$

$$L=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\,dx$$

$\frac{1}{\sin x}=\csc x$

$$=-\ln|\csc x+\cot x|\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$=-\ln\left|\csc\frac{\pi}{2}+\cot\frac{\pi}{2}\right|+\ln\left|\csc\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}\right|$$

$$=-\ln|1+0|+\ln|\sqrt{2}+1|$$

$\ln|1+0|=0$

$$=\ln(\sqrt{2}+1)$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $x = \int_0^y \tan t\,dt$ ile tanımlı $x = f(y)$ eğrisinin

$-\frac{\pi}{3} \le y \le \frac{\pi}{3}$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

$$L = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$x = \int_0^y \tan t\,dt \qquad , \left(x' = \frac{dx}{dy}\right)$$

$$x' = 1.\tan y - 0.$$

$$x' = \tan y \rightarrow (x')^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \tan^2 y$$

$$L = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} \sqrt{\underbrace{1+\tan^2 y}_{\sec^2 y}}\,dy$$



$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} \sec y\,dy$$

$$= \ln|\sec y + \tan y| \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3}$$

$$= \ln\left|\sec\tfrac{\pi}{3} + \tan\tfrac{\pi}{3}\right| - \ln\left|\sec\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) + \tan\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right|$$

$$= \ln|2+\sqrt{3}| - \ln|+2-\sqrt{3}|.$$

* $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$

$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\int_1^e \frac{dx}{\ln x^x}$ integralini hesaplayınız, sonucunu yorumlayınız.

$\ln x = u$
$\frac{1}{x}dx = du$

$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$

$$\int_1^e \frac{dx}{\ln x^x} = \lim_{R \to 1^+} \int_R^e \frac{dx}{\ln x^x}$$

$$= \lim_{R \to 1^+} \int_R^e \frac{dx}{x \ln x}$$

$$= \lim_{R \to 1^+} \left[\ln|\ln x| \Big|_R^e \right]$$

$$= \lim_{R \to 1^+} \left[\underbrace{\ln|\ln e|}_{1 \to 0} - \ln|\ln R| \right]$$

$$= \lim_{R \to 1^+} \left[0 - \ln|\underbrace{\ln R}_{0}| \right]$$

$$= -(-\infty)$$

$$= +\infty$$

limit sonsuz olduğundan genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$ integralni hesoplayınız.

(*) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-|x|}\,dx}_{I_2} = 1+1 = 2$

$I_1 = \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{0} e^{x}\,dx$

$= \lim_{R\to-\infty} \left(e^{x}\Big|_{R}^{0}\right)$

$= \lim_{R\to-\infty} \left(e^{0} - e^{R}\right)$

$= 1 - 0$

$= 1$ a

$I_2 = \int_{0}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} e^{-x}\,dx$

$= \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-x}\Big|_{0}^{R}\right)$

$= \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-R} + \underbrace{e^{0}}_{1}\right)$

$= 0+1$

$= 1$

(*) Sonuç $= I_1 + I_2 = 1+1 = 2$ a

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Örn: $\int_0^1 \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R\to 0^+} \int_R^1 \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$$

$\ln x = u$

$\frac{1}{x}\cdot dx = du$

$x=1 \Rightarrow u=0$

$x=R \Rightarrow u=\ln R$

$$= \lim_{R\to 0^+} \int_{\ln R}^{0} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \lim_{R\to 0^+} \left(\arctan u \Big|_{\ln R}^{0}\right)$$

$$= \lim_{R\to 0^+} (\arctan 0 - \arctan(\ln R))$$

$$= 0 - \arctan(-\infty)$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Ör: $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}\,dx = \lim_{R\to 0^+} \int_R^1 \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}\,dx$$

$1+\sqrt{x}=u$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du$

$x=1 \Rightarrow u=2$

$x=R \Rightarrow u=1+\sqrt{R}$

$$= \lim_{R\to 0^+} \int_{1+\sqrt{R}}^{2} 2\sqrt{u}\,du.$$

$$= \lim_{R\to 0^+} 2.\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{1+\sqrt{R}}^{2}$$

$$= \lim_{R\to 0^+} \left(\frac{4}{3}\cdot u^{3/2}\Big|_{1+\sqrt{R}}^{2}\right)$$

$$= \lim_{R\to 0^+} \left[\frac{4}{3}.2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\cdot(1+\sqrt{R})^{3/2}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\cdot(2\sqrt{2}-1)$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

3) a) $I = \int \frac{2x^3 - 8x^2 + 9x + 1}{x^2 - 4x + 4} dx = ?$ integralini hesaplayınız

*

Ç: $2x^3 - 8x^2 + 9x + 1 \;\big|\; x^2 - 4x + 4$

$-2x^3 + 8x^2 - 8x \qquad\qquad 2x$

$x + 1$

$I = \int \left[2x + \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4} \right] dx$

$\frac{x+1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \Rightarrow x+1 = A(x-2) + B$

$\boxed{A = 1}$ $\quad -2A + B = 1$

$\boxed{B = 3}$

$I = \int \left[2x + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} \right] dx$

$= x^2 + \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C$ //

b) * $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = ?$ integralini hesaplayınız.

Ç: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ int. $x=1$ için imp. int.

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{c \to 1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{c \to 1^-} -2\sqrt{1-x} \Big|_0^c$

$= -2 \lim_{c \to 1^-} \underbrace{\sqrt{1-c}}_{0} - \sqrt{1} = -2 \cdot -1 = 2$ //

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

S 3.a) $y = \ln(\cos x)$ eğrisinin $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ aralığındaki yay uzunluğunu hesaplayınız. **(15p)**

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \quad (2)$$

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx \quad (4) = \int_0^{\pi/3} |\sec x|\, dx = \int_0^{\pi/3} \sec x\, dx \quad (2)$$

$$L = \ln|\sec x + \tan x| \Big|_0^{\pi/3} = \ln\left|\sec\tfrac{\pi}{3} + \tan\tfrac{\pi}{3}\right| - \ln|\sec 0 - \tan 0| \quad (5)$$

$$= \ln(2+\sqrt{3}) - \ln 1 \quad (2)$$

$$= \ln(2+\sqrt{3}) \text{ br.}$$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ ile tanımlı f fonksiyonunun $x = 0$ daki sürekliliğini araştırınız. **(10p)**

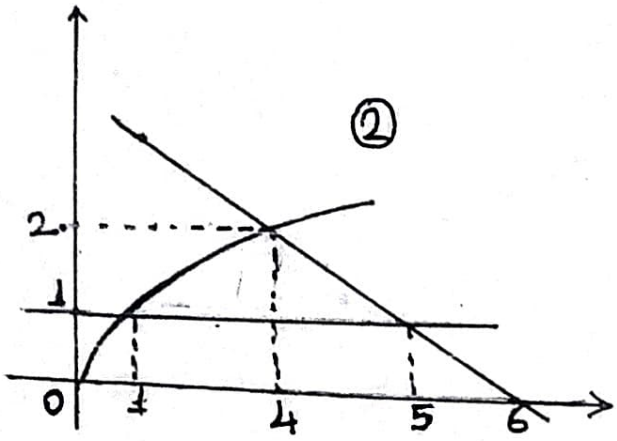
$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$ olmalı.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} \quad (3) = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (3) = 2 \neq 1 = f(0) \quad (2)$$

olduğundan f, $x=0$ da sürekli değildir. (2)

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

S2. a) $y=\sqrt{x}$ eğrisi, $y=1$ ve $y=6-x$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını belirli integral ile hesaplayınız. (Şekil çiziniz). **(12p)**



$\sqrt{x} = 6-x$

$x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x=4, 9)$

$1 = 6-x \Rightarrow x=5$

$1 = \sqrt{x} \Rightarrow x=1$

$$A = \int_1^4 (\sqrt{x}-1)\,dx + \int_4^5 (6-x-1)\,dx$$

(3) (3)

$$A = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - x\right)\Big|_1^4 + \left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_4^5$$

(1) (1)

$$A = \left(\frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 1\right) + \left(25 - \frac{25}{2} - 20 + \frac{16}{2}\right)$$

$$A = \frac{13}{6}\ br^2 \quad (2)$$

Veya

$$A = \int_1^2 (6-y-y^2)\,dy$$

$$= 6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_1^2$$

$$= \left(12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(6 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{13}{6}\ br^2$$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ integralini hesaplayınız. **(13p)**

Verilen integral $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = +\infty$ olduğundan improperdir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \quad (3)$$

(2)

$$= \lim_{a\to 0^+} \arcsin\frac{x-2}{2}\Big|_a^1 \quad (5)$$

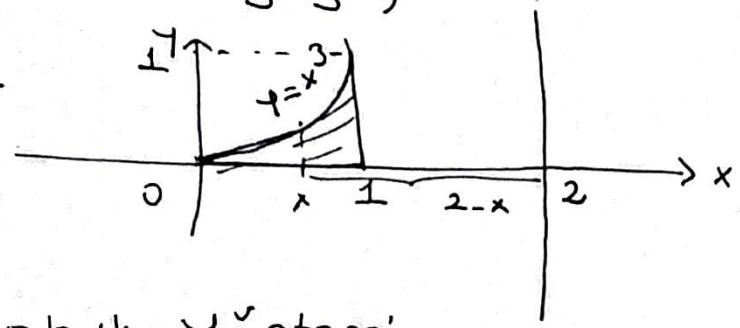
$$= \lim_{a\to 0^+} \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{a-2}{2}\right) \quad (3)$$

$$= -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

3) $y = x^3$ eğrisi, $x = 1$, $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin $x = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz (Şekil çiziniz.)

Ç:



Kabuk Yöntemi

$$V = 2\pi \int_0^1 (2-x)\cdot x^3\,dx = 2\pi \int_0^1 (2x^3 - x^4)\,dx = 2\pi\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= 2\pi\cdot\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right] = \boxed{\frac{3\pi}{5}}\ br^3 //$$

Disk Yöntemi

$$V_y = \pi \int_0^1 (2 - \sqrt[3]{y})^2\,dy - \pi \int_0^1 (2\cdot 1)\,dy$$

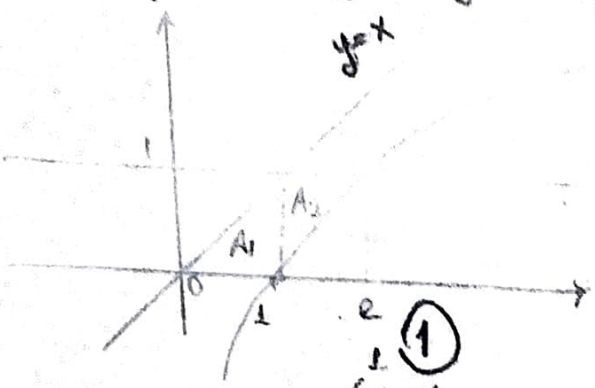
$$= \pi \int_0^1 (4 - 4\sqrt[3]{y^2} + y^{2/3})\,dy - \pi$$

$$= \pi\left[4y - 4\cdot\frac{y^{4/3}}{\frac{4}{3}} + \frac{y^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right]_0^1 - \pi = \pi\left[\frac{4}{1} - 3 + \frac{3}{5}\right] - \pi$$

$$= \frac{8\pi}{5} - \pi = \boxed{\frac{3\pi}{5}}\ br^3$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

a) $y=\ln x$ $y=0$ $y=x$ $y=1$ sınırladığı bölgenin alanını hesaplayınız



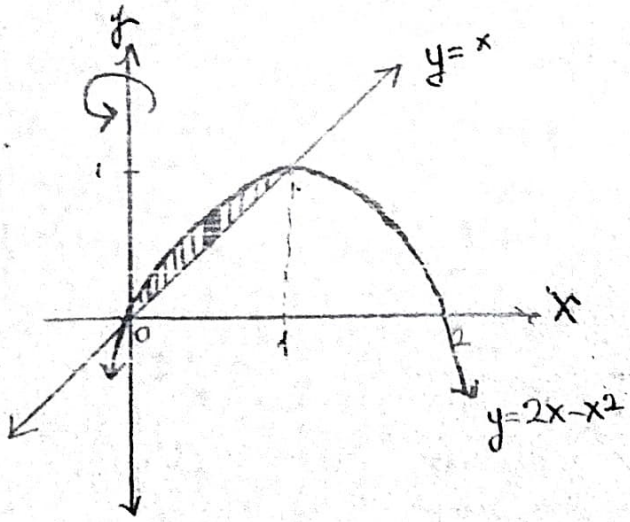
1. yol $A = \int_{y=0}^{1} (e^y - y)\,dy = \left(e^y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = e - \frac{1}{2} - e^0 = e - \frac{3}{2}$ (1) (3) (4) (3)

2. yol : $A_2 = \int_{x=1}^{e} (1 - \ln x)\,dx = \left[x - (x\ln x - x)\right]\Big|_1^e = e - e\ln e + e - 1 - 1$ (1) (3) (3) (2)

$A_2 = e - 2$
$A_1 = \frac{1}{2}$
$A = A_1 + A_2 = e - \frac{3}{2}$ (2)

---

b) $y = 2x - x^2$ eğrisi ile $y=x$ doğrusunun sınırladığı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen cismin hacmini kabuk yöntemiyle hesaplayınız.



$V = 2\pi \int_0^1 x(2x - x^2 - x)\,dx$ (4)

$= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$ (4)

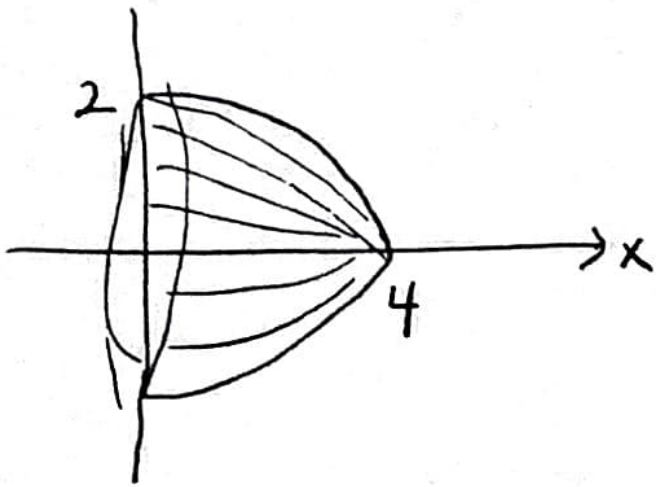
$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$ (4)

$= \frac{\pi}{6}$ (1)

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

a) $y^2 = 4 - x$ parabolünün 1. bölgede kalan kısmının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz (Şekil çiziniz)

Ç:



$$y^2 = 4 - x \Rightarrow 2yy' = -1 \Rightarrow y' = -1/2y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} \Rightarrow (y')^2 = \frac{1}{4(4-x)}$$

$$\Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4(4-x)} = \frac{17-4x}{4(4-x)}$$

$$S = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$S = 2\pi \int_0^4 \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{\frac{17-4x}{4(4-x)}}\, dx$$

$$= \cancel{2}\pi \int_0^4 \cancel{\sqrt{4-x}} \cdot \frac{\sqrt{17-4x}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{4-x}}}\, dx$$

$$= \pi \int_0^4 \sqrt{17-4x}\, dx$$

$$= -\frac{\pi}{6}\left[\sqrt{(17-4x)^3}\right]_0^4$$

$$= -\frac{\pi}{6}(1 - 17\sqrt{17}) = \frac{\pi(17\sqrt{17}-1)}{6}$$

tonozdayim.com/@Zedelevici31

a) $\int \sqrt{1+e^x}\,dx = ?$

Ç: $\sqrt{1+e^x} = u^2 \Rightarrow e^x = u^2 - 1$

$e^x dx = 2u\,du$

$$I = \int \frac{\sqrt{u^2}\cdot 2u\,du}{u^2-1} = 2\int \frac{u^2}{u^2-1}du = 2\int\left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right)du$$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} \Rightarrow A = 1/2 \quad B = -1/2$$

$$I = \int\left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du = 2u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c$$

$$= 2\sqrt{1+e^x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + c$$

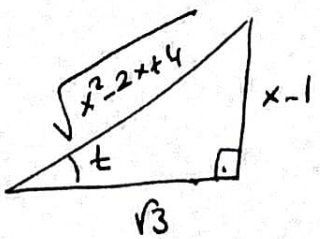
b) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+4)^3}} = ?$

Ç: $x^2-2x+4 = (x-1)^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow x-1 = \sqrt{3}\,tgt$

$dx = \sqrt{3}\sec^2 t\,dt$

$$I = \int \frac{\sqrt{3}\sec^2 t\,dt}{[3tg^2t+3]^{3/2}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\int \frac{\sec^2 t\,dt}{\sec^3 t} = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\sin t + c = \frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}} + c \;//$$

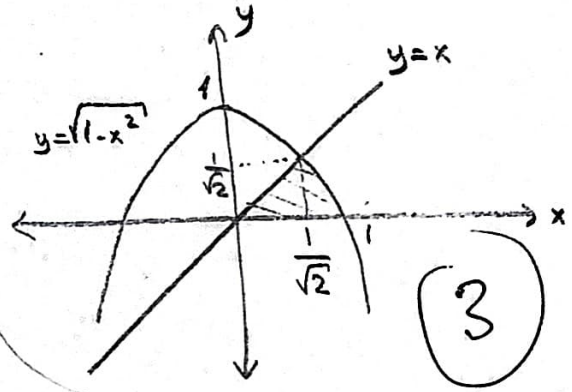


tonozdayim.com/@Zedeleyici31

YYÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Sınav Soru ve Cevap Kağıdı				NOT TABLOSU				
				1. S	2. S	3. S	4. S	TOPLAM
Adı Soyadı								
Öğrenci Numarası		Grup No						
Bölümü	Matematik Bölümü			Sınav Tarihi		04/08/2013		
Dersin Adı	0251321 Matematik I Yıliçi Final Sınavı		Sınav Süresi	75 dk.	Sınav Yeri			
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza				

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

Soru 1 $y=\sqrt{1-x^2}$ eğrisi, $y=x$ ve $y=0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin Ox ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz (Şekil çizilecek).



3

bak

$x=\sqrt{1-x^2}$

$2x^2=1$ (4)

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

+(11)

$$V=\pi\int_0^{1/\sqrt{2}}(x)^2\,dx+\pi\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\,dx \quad (15)$$

$$=\pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/\sqrt{2}}+\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1/\sqrt{2}}^{1} \quad (04)$$

$$=\frac{\pi}{6\sqrt{2}}+\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3\sqrt{2}}=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (3)$$

$$\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)\pi$$

Başarılar dilerim.

tonozdayim.com/@Ezadeyici31

3-) $\int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{1+e^{x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Cevap $u = 1+e^{x^2}$ dön. yap. $du = 2x.e^{x^2}dx$ veya

$\frac{du}{u-1} = 2x\,dx$ olup,

$$\int \frac{2x\,dx}{1+e^{x^2}} = \int \frac{du}{u(u-1)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right) du$$

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}$$

$$(A+B)u - A \equiv 1$$

$$A = -1,\ B = 1$$

$$= \ln|u-1| - \ln|u| + C$$

$$\int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{1+e^{x^2}} = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{2x\,dx}{1+e^{x^2}}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(e^{x^2}) - \ln(1+e^{x^2})\right]_0^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln \frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}} + \ln 2$$

$$= 0 + \ln 2 //$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31