Alan Hesabı

① $[a,b]$ aralığında $f(x) \geq 0$ olmak üzere; $\int_a^b f(x)dx$ integrali; f'in grafiği, x-ekseni, $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasındaki alanı verir.

(*) $y = \left(2+\sin\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \cos\frac{x}{2}$, x-ekseni, $x=0$, $x=\pi$ arasında kalan alanı bulunuz.

$0 \leq x \leq \pi$ için $y \geq 0$ dır. Dolayısıyla alan:

$$A = \int_0^{\pi} \left(2+\sin\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \cos\frac{x}{2}\,dx$$

$2+\sin\frac{x}{2} = u$ $\quad x=0 \to u=2$

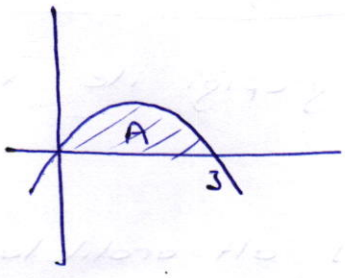
$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx = du$ $\quad x=\pi \to u=3$

$$= \int_2^3 2u^2\,du = \frac{2u^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}$$

(*) x-ekseni üzerinde, $y=3x-x^2$ eğrisi altında kalan bölgenin alanı?

$y=3x-x^2 \to$ Kolları aşağı

x-ekseni kesim noktaları $y=3x-x^2=0 \to x=0$, $x=3$



$$A = \int_0^3 (3x-x^2)\,dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}$$

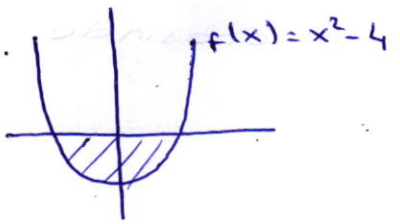
tonozdayim.com/@Zedeleyici31

② Toplam Alan:

$f(x)=x^2-4$ ve $g(x)=4-x^2$ olsun.

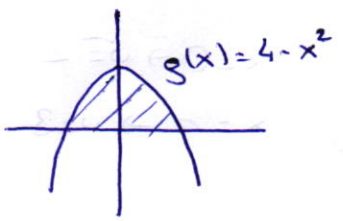
a) f ve g nin $[-2,2]$ deki belirli integrallerini,

b) $[-2,2]$ arasında grafikleri ve x-ekseni arasındaki alanları hesaplayınız.



a) $I=\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx=\frac{x^3}{3}-4x\Big|_{-2}^{2}=-\frac{32}{3}$

b) $A=|I|=\left|\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx\right|=\frac{32}{3}$



a) $I=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=4x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=\frac{32}{3}$

b) $A=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\frac{32}{3}$

★ $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını hesaplarken; fonksiyon hem pozitif hem de negatif değerler alıyorsa, $[a,b]$ aralığını fonksiyonun işaret değiştirmediği alt aralıklara ayırmalıyız. Toplam alan; $f(x)$ in işaret değiştirmediği her alt aralık üzerindeki belirli integralinin mutlak değerleri toplamıdır.

ÖZET: $[a,b]$ üzerinde $y=f(x)$ in grafiği ile x-ekseni arasında kalan alanı hesaplarken:

① f in sıfır olduğu yerlerde $[a,b]$ alt aralıklara bölünür

② Her alt aralıkta f in integrali hesaplanır

③ İntegrallerin mutlak değerleri toplanır

tonozdayim.com/@Zedeleyici61

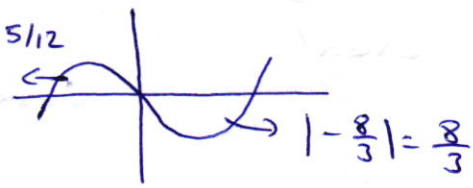
(*) $-1 \le x \le 2$ için $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ in grafiği ile x-ekseni arasındaki bölgenin alanı?

① f in sıfırları: $f(x) = x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2,\ x = -1 \in [-1,2]$

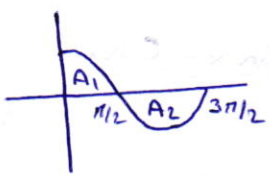
$[-1,0] \Rightarrow [-1,0]\ ,\ [0,2]$

② $\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \Big|_{-1}^{0} = \frac{5}{12}$ $\qquad \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = -\frac{8}{3}$

③ $A = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$



(*) $y = \cos x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$ arasındaki alan?



$A_1 = \int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{0}^{\pi/2} = 1$

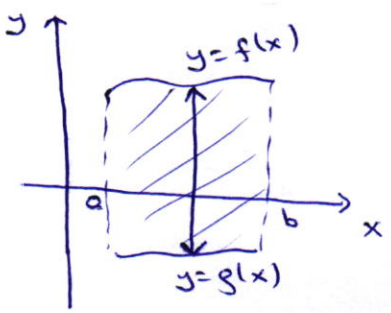
$I_2 = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -1 - 1 = -2 \Rightarrow A_2 = |-2| = 2$

$A = A_1 + A_2 \Rightarrow A = 1 + 2 = 3$

---

③ İki Eğri Arasındaki Alan

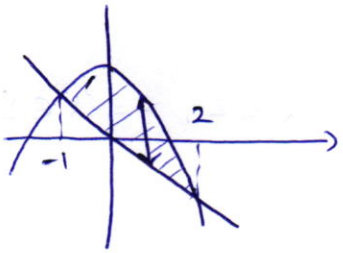
Eğer f ve g , $[a,b]$ de $f(x) \ge g(x)$ (f, g pozitif olmak zorunda değil) olmak üzere sürekli ise bu durumda $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ arasında kalan alan:



$$A = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\,dx$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

(*) $y = 2 - x^2$ ve $y = -x$ ile çevrili bölgenin alanı?

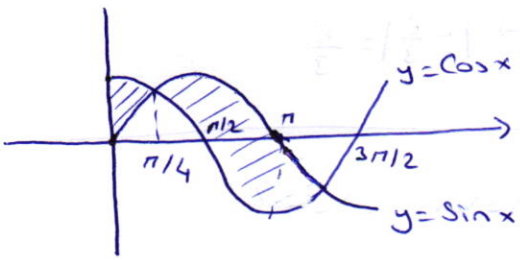


$$\left.\begin{matrix} y = 2 - x^2 \\ y = -x \end{matrix}\right\} \quad 2 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ x = -1 \end{matrix}\right\} \text{ de kesişirler}$$

$$A = \int_{-1}^{2} (2 - x^2 - (-x))\,dx = 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

(*) $x = 0$ dan, $x = \pi$ ye : $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ eğrileri arasındaki toplam alan?



$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

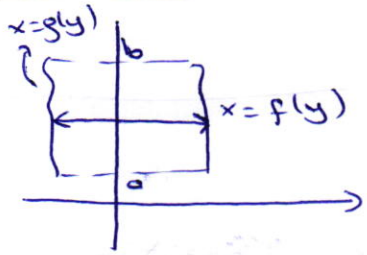
$$A = \int_{0}^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx$$

$$= \sin x + \cos x\Big|_{0}^{\pi/4} + (-\sin x - \cos x)\Big|_{\pi/4}^{\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

---

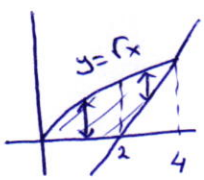
y'ye göre integral



$$A = \int_{a}^{b} (f(y) - g(y))\,dy$$

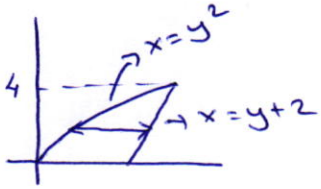
(*) 1. Bölgede, üstten $y = \sqrt{x}$, alttan x-ekseni ve $y = x - 2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanı?

a) x'e göre integral :



$$A = \int_{0}^{2} \sqrt{x}\,dx + \int_{2}^{4} (\sqrt{x} - (x-2))\,dx = \frac{10}{3}$$

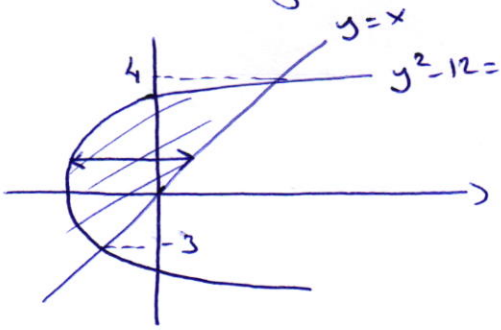
y'ye göre integral :



$$A = \int_{0}^{4} (y + 2 - y^2)\,dy = \frac{10}{3}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

(*) $x = y^2 - 12$ eğrisinin sağında, $y = x$ doğrusunun solunda kalan bölgenin alanı?



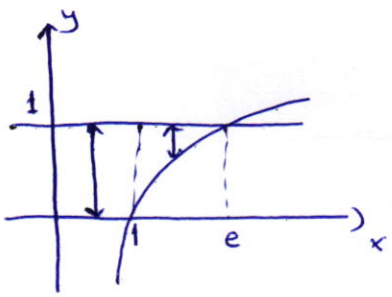
$y^2 - 12 = y \Rightarrow y^2 - y - 12 = 0 \rightarrow y = -3$, $y = 4$

$$A = \int_{-3}^{4} (y - y^2 + 12)\, dy = \frac{343}{6}$$

(*) $y = \ln x$ eğrisi ve $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını veren integrali:

a) x'e göre integral ile

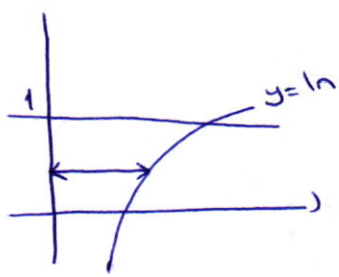
b) y'ye göre integral ile yazınız.



a) x'e göre

$$A = \int_0^1 1\, dx + \int_1^e (1 - \ln x)\, dx$$

$$= 1 + (x - x\ln x + x)\Big|_1^e = e - 1$$



$$A = \int_0^1 e^y\, dy = e^y\Big|_0^1 = e - 1$$

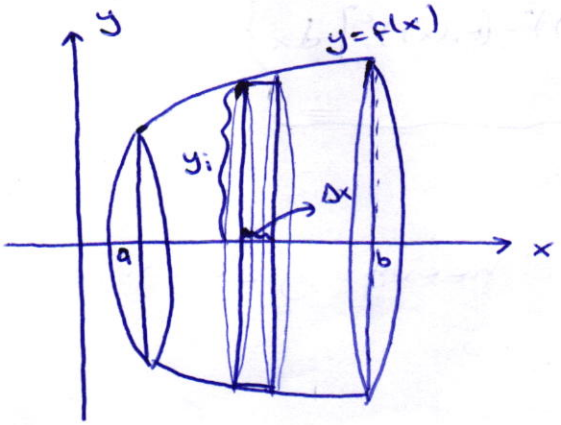
tonozdayim.com/@Zedeleyici31

DÖNEL YÜZEYLERİN SINIRLADIKLARI HACİMLERİN HESABI

① Düzlemsel Dilimler:

a) Disk Yöntemi:

$y=f(x)$ eğrisi ile $x=a$, $x=b$ doğruları ve x-ekseninin sınırladığı düzlem sekliin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini hesaplamak isteyelim.



Bunun için düzlem sekli n dikdörtgene bölelim. Bu dikdörtgenler dönme esnasında dik silindirler meydana getirirler. Bu silindirlerin hacimlerinin toplamının limiti aranan hacmi verir.

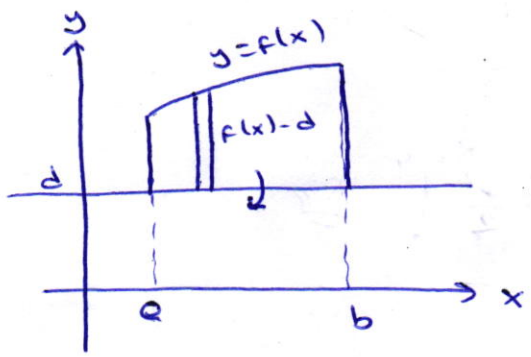
$\Delta V_i = \pi (y_i)^2 \Delta x$

↳ silindirin yarıçapı, ↳ yükseklik

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi (y_i)^2 \Delta x$$

$$= \int_a^b \pi y^2 dx \Rightarrow \boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx}$$

✱ $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=d$ bölgesi $y=d$ etrafında çevrilirse hacim:

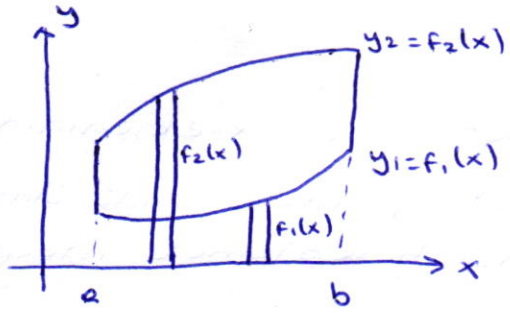


$$\boxed{V = \pi \int_d^b (f(x)-d)^2 dx}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

b) Pul Yöntemi:

★ $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ bölgesi x-ekseni etrafında çevrilirse hacim:

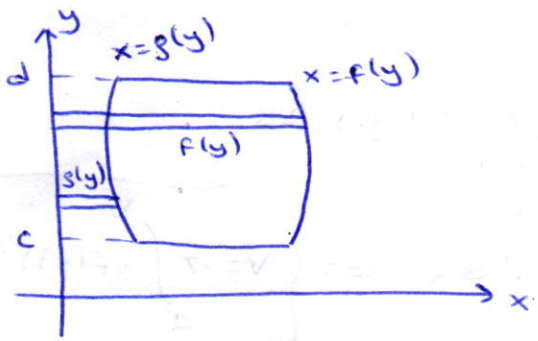


$$V = V_b - V_k$$

$$= \pi \int_a^b (f_2(x))^2 dx - \pi \int_a^b (f_1(x))^2 dx$$

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left[(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2\right] dx}$$

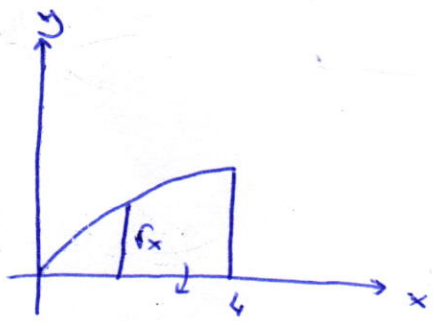
★ $x = g(y)$, $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ arasındaki hacim y-ekseni etrafında çevrilirse hacim:



$$V = V_b - V_k = \pi \int_c^d (f(y))^2 dy - \pi \int_c^d (g(y))^2 dy$$

$$\boxed{V = \pi \int_c^d \left[(f(y))^2 - (g(y))^2\right] dy}$$

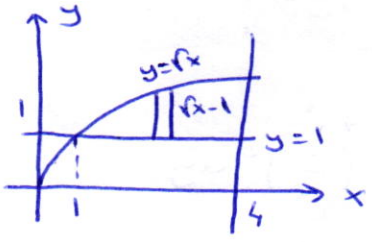
⊛ $y = fx$, $0 \le x \le 4$ ve $y = 0$ arasındaki bölge x-ekseni etrafında çevrilirse hacim?



$$V = \pi \int_0^4 (fx)^2 dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \underline{\underline{8\pi}}$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

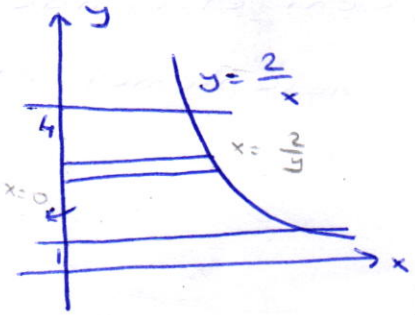
⊛ $y=\sqrt{x}$, $y=1$, $x=4$ arasındaki bölge $y=1$ etrafında çevrilirse hacim?



$$V=\pi\int_1^4 (\sqrt{x}-1)^2\,dx=\pi\int_1^4 (x-2\sqrt{x}-1)\,dx$$

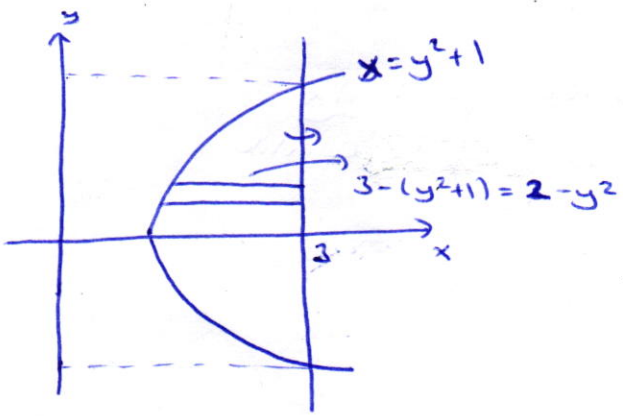
$$=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x^{3/2}-x\Big|_1^4\right)=\frac{7\pi}{6}$$

⊛ y-ekseni, $x=\frac{2}{y}$, $1\le y\le 4$ arasındaki bölge y-ekseni etrafında çevrilirse hacim?



$$V=\pi\int_1^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy=4\pi\left[-\frac{1}{y}\Big|_1^4\right]=\underline{\underline{3\pi}}$$

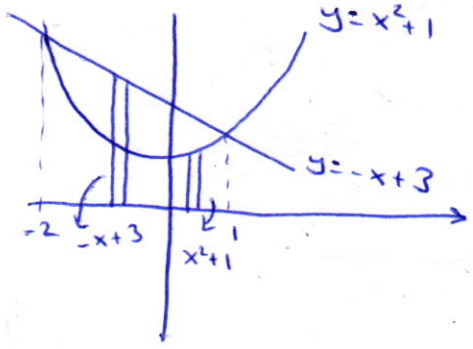
⊛ $x=y^2+1$, $x=3$ arasındaki bölge $x=3$ etrafında çevrilirse hacim?



$$y^2+1=3 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\mp\sqrt{2}$$

$$V=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-y^2)^2\,dy=\frac{64\sqrt{2}}{15}\pi$$

⊛ $y=x^2+1$, $y=-x+3$ arasındaki bölge x-ekseni etrafında çevrilirse hacim?



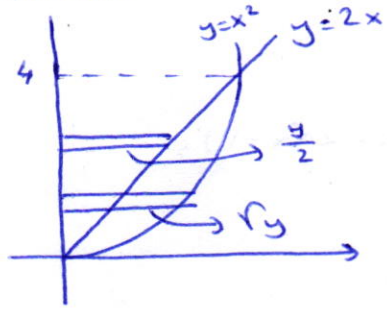
$$x^2+1=-x+3 \Rightarrow x^2+x-2=0 \quad x=1 \quad x=-2$$

$$V=V_b-V_k=\pi\int_{-2}^{1}(-x+3)^2\,dx-\pi\int_{-2}^{1}(x^2+1)^2\,dx$$

$$=\frac{117}{5}\pi$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

(*) $y=x^2$, $y=2x$ arasındaki bölge y-ekseni etrafında çevrilirse hacim?



$x^2 = 2x \rightarrow x=0 \quad x=2$

$V = V_b - V_k$

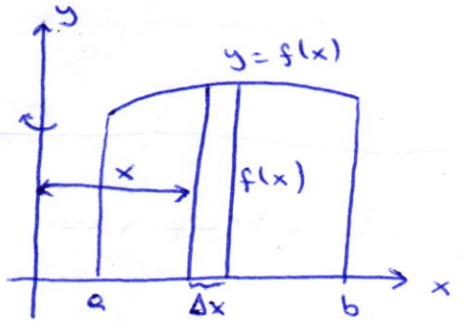
$= \pi \int_0^4 (ry)^2 dy - \pi \int_0^4 \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy$

$= \frac{8}{3}\pi$

---

(2) Silindirik Kabuklar (Kabuk Yöntemi):

(*) $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini hesaplamak isteyelim.



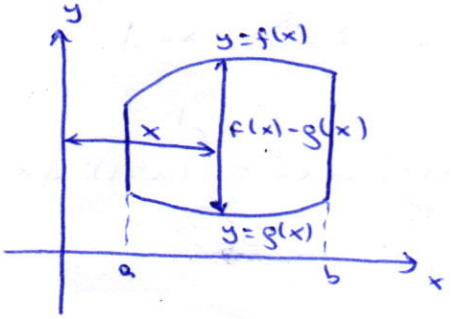
$$V = 2\pi \int_a^b (\text{Kabuk Yarıçapı}) \cdot (\text{Kabuk Yüksekliği}) \, dx$$

(Kabuk Yarıçapı): dönme eksenine olan uzaklık

dx: kalınlık

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$

(*) $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ bölgesi y-ekseni etrafında çevrilirse:



$$V = 2\pi \int_a^b (K.Y.)(K.Y.) \, dx$$

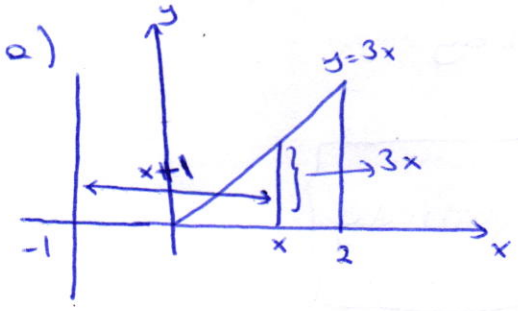
$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot (f(x)-g(x)) \, dx$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici

(*) $y=3x$, $y=0$, $x=2$ bölgesinin $x=-1$ etrafında çevrilmesi ile oluşan hacmi

a) Kabuk yöntemi b) Pul yöntemi ile hesaplayın.

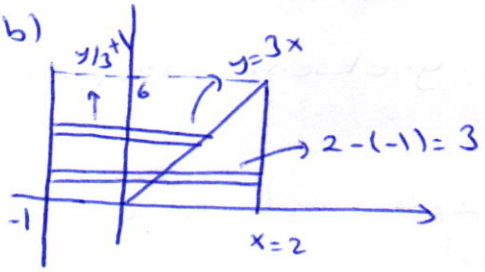
a)



$$V = 2\pi \int_0^2 (x.4)(x.4)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (x+1).3x\,dx = \underline{28\pi}$$

b)



$$V = V_b - V_k$$

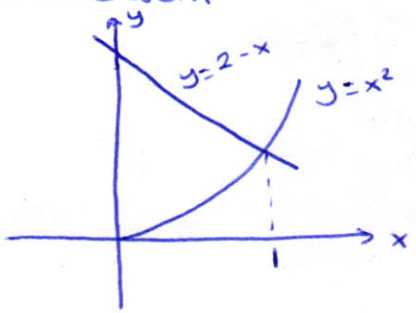
$$V = \pi \int_0^6 3^2\,dy - \pi \int_0^6 \left(\frac{y}{3}+1\right)^2 dy = 28\pi$$

(*) $y=x^2$, $y=2-x$, $x \geq 0$ bölgesinin:

a) Alanı

b) $x=2$ etrafında çevrilmesiyle oluşan hacim?

b) x-ekseni " " " ?



a) $$A = \int_0^1 (2-x-x^2)\,dx$$

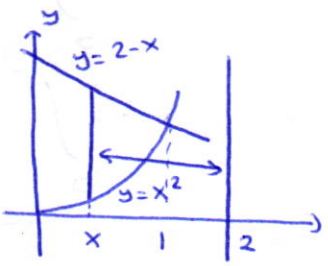
$x^2 = 2-x$

$x^2+x-2=0$

$x=1$

$x=-2$

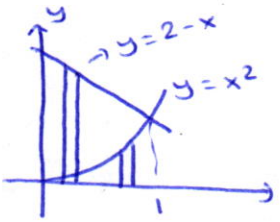
b)



$$V = 2\pi \int_0^1 (x.4)(x.4)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (2-x).(2-x-x^2)\,dx$$

c)

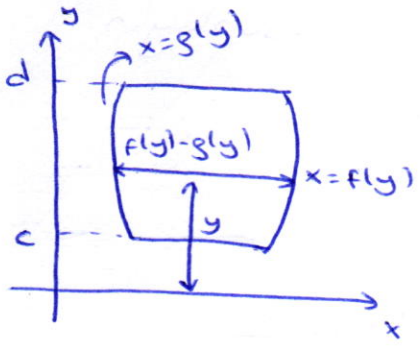


$$V = V_b - V_k$$

$$V = \pi \int_0^1 \left((2-x)^2 - (x^2)^2\right) dx$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici1

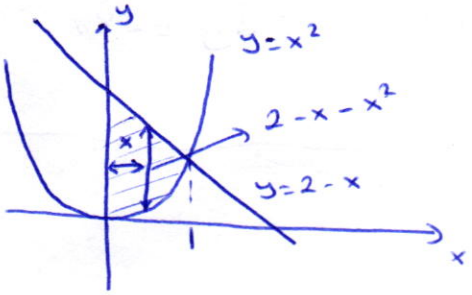
✡ $x=f(y)$, $x=g(y)$, $y=c$, $y=d$ bölgesi x-ekseni etrafında çevrilirse:



$$V = 2\pi \int_c^d (k.y.)(k.y).\,dy$$

$$\boxed{V = 2\pi \int_c^d y.(f(y)-g(y))\,dy}$$

⊛ $y=x^2$, $y=2-x$, $x=0$, $x\geq 0$ bölgesinin y-ekseni etrafında çevrilmesiyle oluşan hacim?

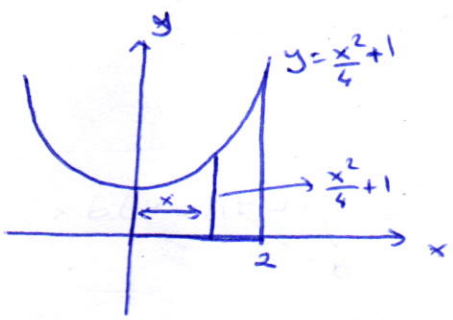


$x^2 = 2-x \Rightarrow x^2+x-2=0 \quad x=1 \quad x=-2$

$$V = 2\pi \int_0^1 (k.y.)(k.y)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x.(2-x-x^2)\,dx = \frac{5\pi}{6}$$

⊛ $y=1+\frac{x^2}{4}$, $x=2$, $x=0$, $y=0$ $\Rightarrow$ y-ekseni etrafında çevir

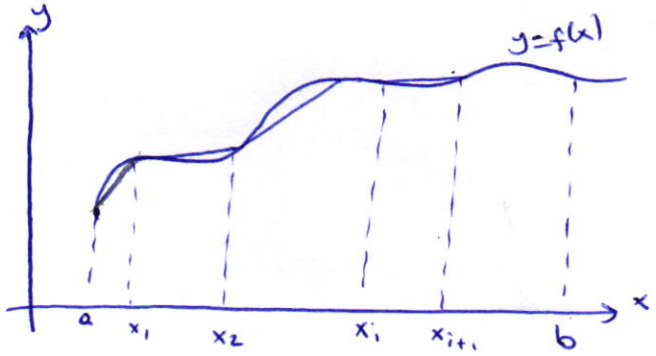


$$V = 2\pi \int_0^2 (k.y)(k.y)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 x.\left(\frac{x^2}{4}+1\right)dx = 6\pi$$

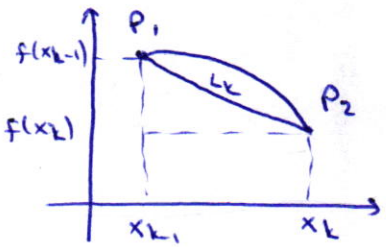
tonozdayim.com/@Zedeleyici

Yay Uzunluğu



$y=f(x)$ eğrisinin $a \le x \le b$ aralığındaki uzunluğunu hesaplamak isteyelim.

$[a,b]$ aralığını n alt aralığa bölelim.



$$L_k = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$

O.O.T. göre $\Delta y_k = f'(c_k).\Delta x_k$ o.ş. bir $c \in (x_{k-1}, x_k)$ vardır. Böylece

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(f'(c_k))^2}\,\Delta x_k$$

için bu toplamın limiti aranan uzunluğu verir.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} L_k = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

✱ $f'(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ise $y=f(x)$ in $[a,b]$ aralığındaki uzunluğu

$$S = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

✱ Eğer $g'(y)$ fonksiyonu $[c,d]$ de sürekli ise $x=g(y)$ nin $[c,d]$ aralığındaki uzunluğu:

$$S = \int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici

(*) $f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$, $1 \le x \le 4$

eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$f'(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}$

$(f'(x))^2 = \frac{x^4}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4}$

$1 + (f'(x))^2 = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2$

$\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}$

$S = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^3}{12} - \frac{1}{x}\Big|_1^4 = \underline{\underline{6}}$

(*) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ eğrisinin $x=0$ dan $x=2$'ye uzunluğu?

$y' = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$ türevi $x=0$ da tanımlı değildir.

Bu nedenle fonksiyonu $y^{3/2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2y^{3/2}$ şeklinde yeniden düzenleriz.

$x = 2y^{3/2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 3y^{1/2} \rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 9y \rightarrow 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + 9y$

$S = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1+9y}\, dy = \int_1^{10} u^{1/2}\, \frac{du}{9} = \frac{2}{27} u^{3/2}\Big|_1^{10}$

$= \frac{2}{27}(10\sqrt{10} - 1)$

$(x=0 \rightarrow y=0,\ x=2 \rightarrow y=1)$

$u = 1+9y$
$du = 9dy$
$y=0 \rightarrow u=1$
$y=1 \rightarrow u=10$

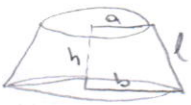
tonozdayim.com/@Zedeleyici33

Dönel Yüzeylerin Alanları

✱ Eğer $f(x) \geq 0$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli türevlenebilen bir fonk. ise $y=f(x)$'in grafiğinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$



Y.A $= \pi(a+b)\sqrt{h^2+(b-a)^2}$
$= \pi(a+b)\,l$

✱ $x=g(y) \geq 0$ $[c,d]$ aralığında y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanı:

$$S = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1+(g'(y))^2}\, dy$$

⊛ $x = 1-y$, $0 \leq y \leq 1$ doğru parçasını y-ekseni etrafında çevirdiğimizde oluşan koninin yanal yüzey alanı?

$$S = 2\pi \int_0^1 (1-y)\sqrt{1+(-1)^2}\, dy = 2\sqrt{2}\,\pi \left(y - \frac{y^2}{2} \right)\Big|_0^1 = \sqrt{2}\pi$$

⊛ $y = \sqrt{x+1}$ $\quad 1 \leq x \leq 5$ $\quad$ x-ekseni $\rightarrow$ $S = 2\pi \int_1^5 \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{1+((\sqrt{x+1})')^2}\, dx$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $\quad (y')^2 = \frac{1}{4(x+1)}$ $\quad 1+(y')^2 = \frac{4x+5}{4(x+1)}$ $\quad \sqrt{1+(y')^2} = \frac{\sqrt{4x+5}}{2\sqrt{x+1}}$

$$S = 2\pi \int_1^5 \sqrt{x+1} \cdot \frac{\sqrt{4x+5}}{2\sqrt{x+1}}\, dx = 2\pi \int_1^5 \sqrt{4x+5}\, dx = 2\pi \int_9^{25} \frac{\sqrt{u}}{4}\, du = 2\pi \left. \frac{u^{3/2}}{4 \cdot \frac{3}{2}} \right|_9^{25}$$

$4x+5 = u$ $\quad 4dx = du$

$x=1 \rightarrow u=9$

$x=5 \rightarrow u=25$

$$= \frac{49}{3}\pi$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici

Yay Uzunluğu için Diferansiyel Formül

$y=f(x)$ ve $y'=f(x)$ $[a,b]$ de sürekli ise $P(a,f(a))$ başlangıç noktasından $Q(x,f(x))$ noktasına $y=f(x)$ in uzunluğu:

$$S(x)=\int_a^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$$ formülü ile bulunur.

$S(x)$'e yay uzunluğu fonksiyonu denir.

(*) $f(x)=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}$ eğrisi için; başlangıç noktasını $A\left(1,\frac{13}{12}\right)$ alarak yay uzunluğu fonksiyonunu bulunuz.

Bu fonk. yardımı ile $A\left(1,\frac{13}{12}\right)$ $B\left(4,\frac{67}{12}\right)$ arası uz. bulunuz.

$f'(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}$ $\quad (f'(x))^2=\frac{x^4}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}$ $\quad 1+(f'(x))^2=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2$

$\sqrt{1+(f')^2}=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}$

$$S(x)=\int_1^x\left(\frac{t^2}{4}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{t^3}{12}-\frac{1}{t}\Big|_1^x=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}-\frac{1}{12}+1=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}+\frac{11}{12}$$

$$S(4)=\frac{4^3}{12}-\frac{1}{4}+\frac{11}{12}=\underline{\underline{6}}$$

Burası Müfredat Dışı :))

İyi çalışmalar...

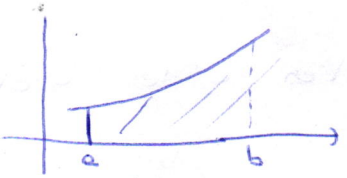
tonozdayim.com/@Zedeleyici32

Genelleştirilmiş İntegraller

1. Tip improper İntegraller

① Eğer $f(x)$, $[a, \infty)$ da sürekli ise:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^{R} f(x)\,dx$$



② Eğer $f(x)$, $(-\infty, a]$ da sürekli ise:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^{a} f(x)dx$$

③ Eğer $f(x)$, $(-\infty, \infty)$ aralığında sürekli ise, c herhangi bir reel sayı olmak üzere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^{c} f(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_c^{R} f(x)\,dx$$

Her bir durumda, limit sonucu sonlu ise improper integral yakınsaktır ve limit değeri integralin değeridir. Eğer limit yoksa veya $\pm\infty$ ise integral ıraksaktır.

2. Tip improper İntegraller

① Eğer $f(x)$, $(a, b]$ de sürekli, a da süreksiz ise:

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^{b} f(x)dx$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici

(2) $f(x)$, $[a,b)$ de sürekli, b de süreksiz ise;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

(3) $f(x)$, $a<c<b$ iken c'de süreksiz, $[a,c)\cup(c,b]$ de sürekli ise;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Her bir durumda limit sonlu ise int. yakınsaktır ve değeri bu limit değeridir. Limit yoksa veya sonuç $\pm\infty$ ise int. ıraksaktır

---

(*) $y=\frac{\ln x}{x^2}$ eğrisi altında $x=1$ den $x=+\infty$'a kadar olan alanı hesaplayınız.

$$I=\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$\ln x = u \quad \frac{dx}{x}=du$

$\frac{dx}{x^2}=dv \quad v=-\frac{1}{x}$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^R + \int_1^R \frac{dx}{x^2}\right] = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{\ln R}{R} - \frac{1}{x}\Big|_1^R\right] = \lim_{R\to\infty}\left[\underbrace{-\frac{\ln R}{R}}_{\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}=0} - \underbrace{\frac{1}{R}}_{0} + 1\right] = 1$$

(*) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to-\infty}\int_R^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \operatorname{Arctan}x\Big|_R^0 + \lim_{R\to\infty}\operatorname{Arctan}x\Big|_0^R$$

$$= \underbrace{\lim_{R\to-\infty}(-\operatorname{Arctan}R)}_{-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\operatorname{Arctan}R}_{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

tonozdayim.com/@Zedeleyici

(*) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{1-x} = \lim_{c\to 1^-} \left[-\ln|1-x| \Big|_0^c \right]$

$= \lim_{c\to 1^-} \left[-\ln|1-c| \right] = +\infty \rightarrow$ integral iraksaktir

---

(*) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

$\int_0^1 + \int_1^3$

$= \lim_{c\to 1^-} \left[3(x-1)^{1/3} \Big|_0^c \right] + \lim_{c\to 1^+} \left[3(x-1)^{1/3} \Big|_c^3 \right]$

$= \lim_{c\to 1^-} \underbrace{\left(3(c-1)^{1/3} + 3 \right)}_{0} + \lim_{c\to 1^+} \left(3\cdot 2^{1/3} - \underbrace{3(c-1)^{1/3}}_{0} \right)$

$= 3 + 3\sqrt[3]{2}$

tonozdayim.com/@Zedeleyici