Fonksiyonların Ekstremum Değerleri:

Mutlak Ekstremum Değerler (Mutlak Max./Mutlak Min. Değerleri):

f'in tanım kümesi D olsun. Eğer her $x \in D$ için;

a) $f(x) \leq f(c)$ olacak şekilde bir $c \in D$ varsa f fonksiyonu c noktasında $f(c)$ mutlak maksimum değerine sahiptir denir.

b) $f(x) \geq f(c)$ olacak şekilde bir $c \in D$ varsa f fonksiyonu c noktasında $f(c)$ mutlak minimum değerine sahiptir.

NOT:

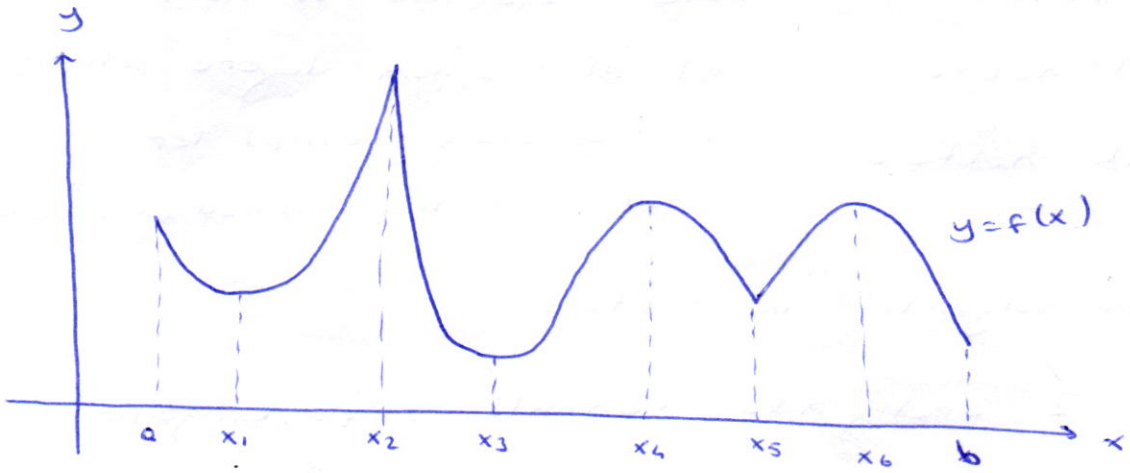
① Bir fonksiyonun birden fazla mutlak max./min. noktası olabilir. $f(x) = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ noktalarında mutlak max. değeri 1'e ulaşır.

② Her fonksiyonun mutlak max/min değere sahip olması gerekmez. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun sonlu bir mutlak max. değeri yoktur.

✱ Bir fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerine ekstremum değerleri denir.

Varlık Teoremi: Eğer f in tanım bölgesi, sonlu kapalı bir aralık veya bu şekildeki aralıkların sonlu bir birleşiminden oluşursa ve f bu bölgede sürekli ise o zaman, f fonksiyonu bir mutlak minimum değere ve bir mutlak maksimum değere sahiptir.

tonozdayim.com/@Zedeleyici



Yukarıdaki şekle göre f'in mutlak max değeri $f(x_2)$ ve mutlak min. değeri $f(x_3)$ dür. Bu değerlere ek olarak f in başka yerel max. ve yerel min. değerleri vardır. f fonksiyonu a, x_2, x_4, x_6 noktalarında yerel max değerlere ve x_1, x_3, x_5, b noktalarında yerel min. değerlere sahiptir.

Yerel Ekstremum Değerler

Bir f fonksiyonunun D tanım bölgesinin bir iç noktasında; eğer c'yi içeren bir açık aralıktaki her x için:

* $f(x) \geq f(c)$ ise, c'de bir yerel minimumu
* $f(x) \leq f(c)$ ise, c'de bir yerel maksimumu vardır.

Kritik Nokta: Bir f fonksiyonunun tanım kümesindeki bir iç nokta, f' türevini sıfır veya tanımsız yapıyorsa f fonksiyonunun kritik noktasıdır.

Yani;

$f'(c)=0$ veya $f'(c)$ tanımsız ise c kritik noktadır.

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

✱ Bir $f(x)$ fonksiyonu sadece aşağıda verilen 2 çeşit özel noktada yerel ekstremum değere sahip olabilir:

① f in kritik noktaları → $f'(x)=0$ olan $x \in D(f)$ ler
→ $f'(x)$ in tanımlı olmadığı $x \in D(f)$ ler

② f in tanım bölgesinin uç noktaları.

Teorem: Bir I aralığında tanımlı f fonksiyonu bir $x_0 \in I$ noktasında yerel max. (veya yerel min.) değere sahipse; o zaman x_0 noktası ya f in bir kritik noktasıdır ya da I nın bir uç noktasıdır.

Mutlak Ekstremum Değerlerin Bulunması (Sonlu Kapalı Aralıkta):

① Fonksiyonun kritik noktaları ve uç noktaları belirlenir.

② Bu noktalarda fonksiyonun aldığı değerler hesaplanır.

③ Bu değerlerin en büyüğü mutlak max. en küçüğü mutlak min. değerdir.

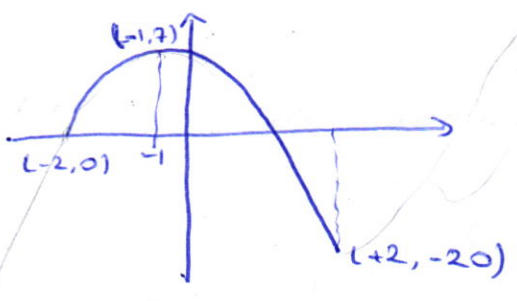
✱ $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ $\quad -2 \le x \le 2$ deki mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

$\boxed{x=2}$ $\boxed{x=-2}$ → uç noktalar.

$f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x \not= 3 \quad \boxed{x=-1}$

$x=2 \to f(2)=-20$
$x=-2 \to f(-2)=0$
$x=-1 \to f(-1)=7$

$(-1,7)$ noktası mutlak max. noktası
$(2,-20)$ " " min "



tonozdayim.com/@Zedeleyici31

(*) $y = 3x^{2/3} - 2x$ fonksiyonunun $[-1,1]$ deki mutlak max. ve mutlak min. noktaları?

$\boxed{x=-1}$ $\boxed{x=1}$ uç noktalar

$y' = 2x^{-1/3} - 2 = 2\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)$ $\boxed{x=0}$ y' yü tanımsız yapar. K.Nokta

$y' = 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ K.N.

$x=-1 \rightarrow f(-1)=5$ $(-1,+5)$ mutlak max. nokta

$x=0 \rightarrow f(0)=0$ $(0,0)$ mutlak min. nokta

$x=1 \rightarrow f(1)=1$

(*) $f(x) = 8x - x^4$ $[-2,1]$ deki mutlak max ve mutlak min. nokta?

$\boxed{x=-2}$ $\boxed{x=1}$ uç noktalar

$f'(x) = 8 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \notin [-2,1]$ $(\sqrt[3]{2} > 1)$

$x=-2 \rightarrow f(-2)=-32$ $(-2,-32)$ mutlak min.

$x=1 \rightarrow f(1)=7$ $(1,7)$ mutlak max.

Artan / Azalan Fonksiyonlar:

$f(x)$ in $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de türevlenebilir olduğunu kabul edelim.

* Her $x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0$ ise; f $[a,b]$ de artandır.
* " " " $f'(x) < 0$ " ; " " " azalandır.

tonozdayim.com/@Zedeleyici51

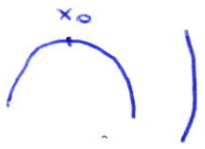
Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testi

I. Kısım (Kritik Noktaların Test Edilmesi):

f fonksiyonu tanım kümesinin bir uç noktası olmayan x_0 da sürekli olsun.

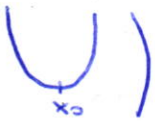
1) Eğer x_0 noktasını içeren ve (a, x_0) da $f'(x) > 0$ ve (x_0, b) de $f'(x) < 0$ olacak şekilde bir açık (a,b) aralığı varsa, f x_0 da yerel max. değere sahiptir.

(f', artıdan eksiye değişiyor, artarken azalıyor)



2) Eğer x_0 noktasını içeren ve (a, x_0) da $f'(x) < 0$ ve (x_0, b) de $f'(x) > 0$ olacak şekilde bir açık (a,b) aralığı varsa, f x_0 da yerel min. değere sahiptir.

(f', - den + ya değişiyor, azalırken artıyor.



3) f', x_0 da işaret değiştirmezse max. veya min. nokta değildir.

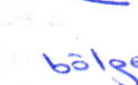
II. Kısım (Uç Noktaların Test Edilmesi):

1) f, tanım bölgesinin bir sol uç noktası a'da sağdan sürekli olsun.

a) Eğer (a,b) de $f'(x) > 0$ ise f a'da yerel min değere sahiptir.



b) Eğer (a,b) de $f'(x) < 0$ ise f a'da yerel max. değere sahiptir.



2) f, tanım bölgesinin bir b ~~de~~ sağ uç noktasında soldan sürekli olsun.



a) (a,b) de $f'(x) > 0$ ise f b'de yerel max değere sahiptir.

b) " " $f'(x) < 0$ ise " " yerel min " " .



tonozdayim.com/@Zedeleyici31

⊛ $f(x) = x^{1/3}(x-4)$ fonksiyonunun artan/azalan olduğu aralıkları, yerel ekstremumlarını ve varsa mutlak ekstremumlarını bulunuz.

$f(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$ → tanım kümesi: $(-\infty, \infty)$ → uç nokta yok!

$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$

$\boxed{x=0}$ → K.N (f'yü tanımsız yapar) (ÇKK)

$f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ K.N.

x	$-\infty$		0		1		∞
f'		−	0	−	0	+	
f		↘		↘	min	↗	

eks. değil. yerel min.

$x=1 \rightarrow f(1) = -3$

$(1,-3)$ 1 noktası aynı zamanda mutlak min.

⊛ $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ in artan/azalan olduğu aralıkları ve ekstremumlarını bulunuz.

T.K: $\mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$ → uç nokta yok

$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ $x=-1$ → f'yü tanımsız yapar ancak K.N. değil

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2+2x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}\ \boxed{x=-2}$ K.N.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'		+	0	−	∄	−	0	+	
f		↗	y.max	↘		↘	y.min	↗	

Artan: $(-\infty,-2] \cup [0,\infty)$

Azalan: $[-2,-1) \cup (-1,0]$

Y.Max: $x=-2$

Y.Min: $x=0$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

(*) $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 25x^3 - 15x^2 + 1$ Artan / Azalan aralıklar? Max / Min?

$f'(x) = 15x^4 - 60x^3 + 75x^2 - 30x = 15x(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$ $\boxed{x=0}$ $\boxed{x=1}$

1	1	-4	5	-2
		1	-3	2
	1	-3	2	0

$x^2 - 3x + 2 = 0$ $\boxed{x=2}$ $\boxed{x=1}$ $x=1$ Ç.K.Kök

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		+	0	−	0	−	0	+	
f		↗	max	↘		↘	min	↗	

$x=0 \rightarrow$ Yerel max

$x=2 \rightarrow$ Yerel min

Artan: $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

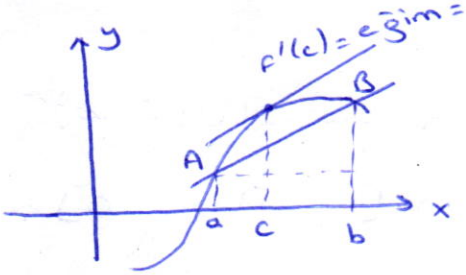
Azalan: $[0, 2]$

Ortalama Değer Teoremi:

$f(x)$, $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de türevlenebilir ise

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

Geometrik olarak O.O.T., a ve b arasında bir yerde eğrinin AB kirişine paralel en az bir teğetinin olduğunu söyler.



(*) $f: [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x}{x+1}$ fonksiyonuna O.O.T. gerçekleyiniz.

$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2-x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$ $\Rightarrow$ f, (0,3) de türevli

$f(x)$, $[0,3]$ de sürekli. O halde $f'(c) = \frac{c^2+2c-1}{(c+1)^2} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{1}{2}$

$c^2 + 2c - 3 = 0 \Rightarrow c_1 \neq -3$ $\boxed{c_2 = 1}$ $c_2 = 1 \in (0,3)$ ✓

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

(*) $f(x)=\begin{cases} x^3+x & , x\le 1 \\ 4x-2 & , x>1 \end{cases}$ fonksiyonuna $[-2,2]$ de O.O.T. gerçekleyiniz.

(1) $f(x)$, $[-2,2]$ de sürekli mi?

Fonksiyon $[-2,1)$ de $f(x)=x^3+x$ dir ve süreklidir.

Fonksiyon $(1,2]$ de $f(x)=4x-2$ " " ",

$x=1$ de: $\lim_{x\to 1^+} 4x-2 = \lim_{x\to 1^-} x^3+x = 2 = f(1)$ olduğundan

süreklidir. Sonuç olarak $f(x)$ $[-2,2]$ de süreklidir.

(2) $f(x)$, $(-2,2)$ de türevlenebilir mi?

Fonksiyon $[-2,1)$ de $f(x)=x^3+x$ dir, türevlenebilirdir.

" $(1,2]$ " $f(x)=4x-2$ dir, "

$x=1$ için:

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4(1+h)-2-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4h}{h}=4$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^3+(1+h)-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}(h^2+3h+4)=4$$

$f'_-(1)=f'_+(1)=f'(1)=4$ türevli. Sonuçta f, $[-2,2]$ de türevli.

O.O.T. uygulanabilir.

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & , x\le 1 \\ 4 & , x>1 \end{cases} \qquad f'(c)=\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=4$$

$3c^2+1=4 \Rightarrow c=\pm 1$

$\underline{c=-1}$ ve $\underline{1\le c<2}$ olmalıdır.

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

(*) $0<a<b$ için $\sqrt{a} < \frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) < \sqrt{b}$ eşitsizliğinin sağlandığını O.D.T. kullanarak gösteriniz.

$f(x)=\sqrt{x}$, $[a,b]$ alalım.

① $f(x)$ $[a,b]$ de sürekli mi?

$f(x)=\sqrt{x}$ $x \geq 0$ için süreklidir. $a,b>0$ olduğundan $f(x)$ $[a,b]$ de süreklidir.

② $f(x)$ (a,b) de türevli mi?

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $x>0$ için $f'(x)$ tanımlı. $a,b>0$ olduğundan

$f(x)$ (a,b) de türevli.

O.D.T uygulanabilir.

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\Rightarrow$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır.

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$$

★ $c>a \Rightarrow \sqrt{c}>\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} > \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$

$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}$

$\frac{1}{2\sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{b}+\sqrt{a} > 2\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} < \frac{1}{2}(\sqrt{b}+\sqrt{a})$ ①

★ $c<b \Rightarrow \sqrt{c}<\sqrt{b} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} > \frac{1}{2\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$

$$\sqrt{b} > \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2} \quad (2)$$

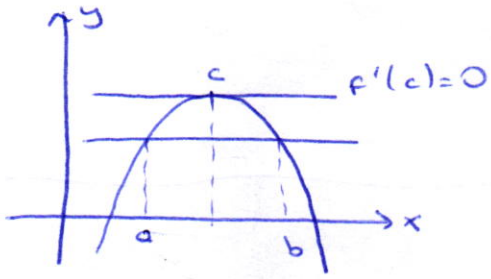
① ve ② den

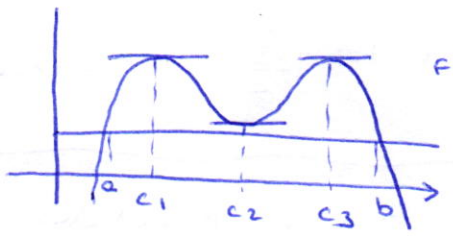
$$\sqrt{a} < \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} < \sqrt{b}$$ dir.

tonozdayim.com/@Zedeleyici21

Rolle Teoremi: f $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de türevlenebilir ve $f(b)=f(a)$ olsun. Bu durumda, en az bir $c\in(a,b)$ için $f'(c)=0$ dır.

Geometrik olarak, Rolle Teoremi, bir eğrinin yatay bir doğruyu kestiği herhangi iki nokta arasında en az bir yatay teğete sahip olduğunu belirtir.





(*) $f(x)=x^2-2x+3$ fonksiyonuna $[0,2]$ de Rolle Teo. uygulayın.

$f(x)$, $[0,2]$ de sürekli, $(0,2)$ de türevli ve $f(0)=f(2)=3$ dür. Rolle Teoremi uygulanabilir.

$f'(c)=2c-2=0 \Rightarrow c=1\in(0,2)$ ✓

(*) $f(x)=x^{2/3}-1$ fonksiyonuna $[-1,1]$ de Rolle Teo. uygulayın.

f, $[-1,1]$ de sürekli ✓

$f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow x=0$ için tanımsız. $f(x)$ $(-1,1)$ de türevlenemez.

Sonuç olarak $f(x)$'e $[-1,1]$ de Rolle Teo. uygulanamaz.

Teorem: Bir fonksiyonun türevi, bir aralığın her noktasında sıfır ise, fonksiyon o aralıkta sabittir.

tonozdayim.com/@Zedeleyici51

T22

(*) $f(x)=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos x.\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ fonksiyonunun sabit olduğunu göstererip bu sabiti bulunuz.

$$f'(x)=-2\cos x\sin x+2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin x.\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos x.\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

$$=-\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=0$$

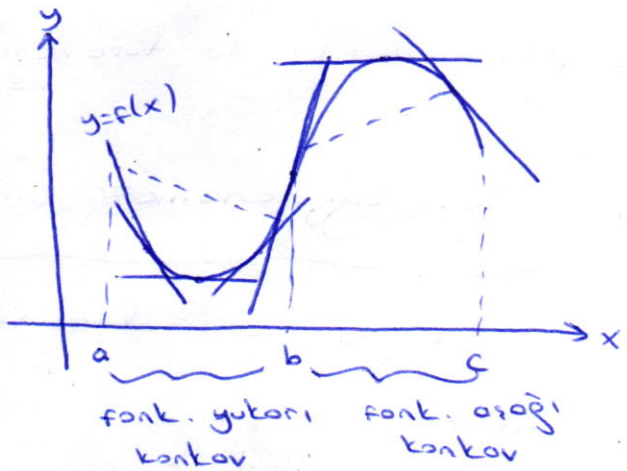
$f(x)$ sabittir.

$x=0$ için $f(0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $f(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Konkavlık ve Bükün Noktaları

Eğer bir f fonksiyonu açık bir I aralığında türevlene. bilir ve f' türevi I üzerinde artan bir fonk. ise (yani $f''>0$ ise) f fonksiyonu I üzerinde yukarı konkavdır denir. Aynı şekilde f' türevi I üzerinde azalan ise ($f''<0$) f fonksiyonu I üzerinde aşağı konkavdır denir.

Konkavlık için Bazı Geometrik Gözlemler:



1) Eğer bir açık aralıkta f yukarı konkav ise, bu aralıkta, f in grafiği teğetlerin üstünde kalır, eğri üzerindeki iki noktayı birleştiren doğru parçası ise grafiğin üstünde kalır.

2) Eğer bir açık aralıkta f aşağı konkav ise, bu aralıkta, f in grafiği teğetlerin altında, iki noktayı birleştiren doğru parçası ise grafiğin altında kalır.

3) f fonksiyonu bir noktada teğete sahip ve f in bu noktanın her iki tarafındaki konkavlıkları zıt ise böyle bir noktaya bükün noktası denir.

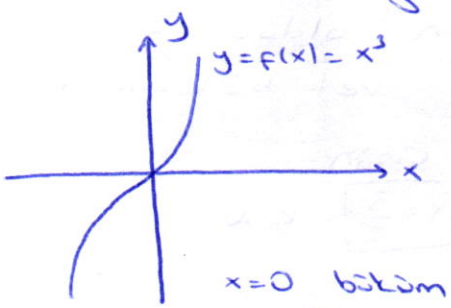
tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Bükülme Noktası: Bir $y=f(x)$ fonksiyonu ve bir $x=x_0 \in D(f)$ noktası verilsin.

a) $y=f(x)$ in grafiği x_0 da teğete sahip (ya $f'(x_0)$ mevcut ya da x_0 da dikey teğete sahip)

b) f in x_0 in her iki yanındaki konkavliği zıt ise $y=f(x)$ eğrisi x_0 da bükülme noktasına sahiptir.

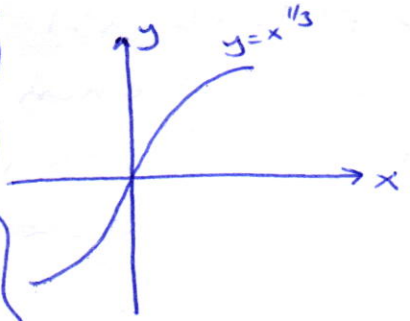
✱ $(c, f(c))$ bükülme noktasında ya $f''(c)=0$ dır ya da $f''(c)$ mevcut değildir.



$x=0$ bükülme noktası



$y=f(x)$ in $x=a$ nın iki yanında konkavliği zıttır. Ancak $x=a$ da teğeti mevcut değildir. $x=a$ Bükülme nok. değil



$x=0$ bükülme noktası

Konkavlik ve İkinci Türev:

1) I üzerinde $f''(x)>0$ ise; f I üzerinde yukarı konkavdır. ∪

2) " " $f''(x)<0$ "; f I üzerinde aşağı konkavdır. ∩

3) Eğer x_0 f in bükülme noktası ve $f''(x_0)$ mevcut ise o zaman, f x_0'ı içeren bir açık aralıkta türevlenebilirdir. f x_0'ın bir tarafında artan, bir tarafında azalan olduğundan o zaman f' x_0 da bir yerel min veya yerel max. sahip olmalıdır. Bu ise $f''(x_0)=0$ olduğunu gösterir.

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

(*) $f(x) = x^6 - 10x^4$ konkavlik aralıklarını ve bükün noktalarını bulunuz.

$f'(x) = 6x^5 - 40x^3$ $\quad f''(x) = 30x^4 - 120x^2 = 0 \Rightarrow 30x^2(x^2-4) = 0$

$\boxed{x=0}$ $\boxed{x=2}$ $\boxed{x=-2}$

G.K.K.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f''		+	0	−	0	−	0	+	
f		∪	B.N.	∩		∩	B.N.	∪	

Yukarı Konkav: $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

Aşağı Konkav: $[-2, 2]$

Bükün Noktası: $x=2$ $\quad x=-2$

(*) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ in artan ve azalan olduğu aralıkları, yerel ekstremum noktalarını, konkavlığını ve bükün noktalarını belirleyip eğriyi kaba taslak çizin.

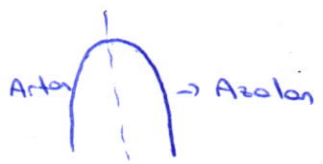
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x=0}$ G.K.K. $\quad \boxed{x=\frac{3}{2}}$ K.N.

$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0$ $\quad \boxed{x=0}$ $\quad \boxed{x=1}$

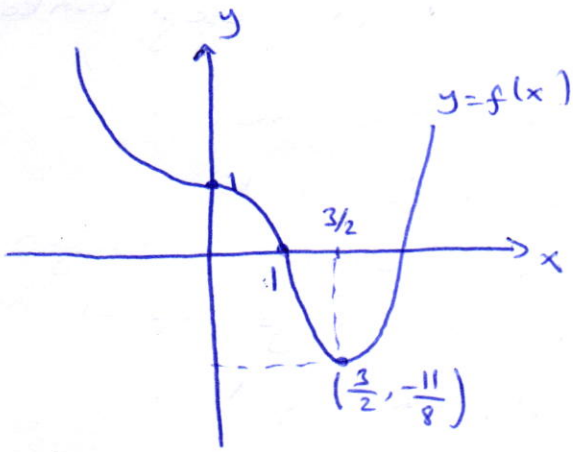
x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
f'		−	0	−		−	0	+	
f''		+	0	−	0	+		+	
f		↘	B.N.	↘	B.N.	↘	min	↗	



Yukarı konkav



Aşağı konkav



$x=0 \rightarrow f(0) = 1$

$x=1 \rightarrow f(1) = 0$

$x=\frac{3}{2} \rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{8}$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

Yerel Ekstremumlar için 2. Türev Testi:

① Eğer $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)<0$ ise o zaman f, x_0'da yerel maksimuma sahiptir.

② Eğer $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)>0$ ise o zaman f, x_0'da yerel minimuma sahiptir.

③ Eğer $f'(x_0)=0$ ve $f''(x_0)=0$ ise herhangi bir çıkarımda bulunamayız. f, x_0'da bir yerel max., yerel min. veya bükülme noktasına sahip olabilir.

Asimptotlar: Sonsuza giden bir eğrinin çeşitli noktalarının gittikçe yaklaştığı bir eğri veya doğrudur.

① **Dikey Asimptot:** Eğer $\lim_{x\to a^-} f(x)=\mp\infty$ veya $\lim_{x\to a^+} f(x)=\mp\infty$ veya her iki durum da mevcut ise $y=f(x)$ in grafiği $x=a$ da dikey asimptota sahiptir. * Eğri dikey asimptotunu kesemez.

Bu daha çok f(x) in iki ifadenin bölümü şeklinde olması ve $x=a$ da paydanın sıfır olması durumunda gerçekleşir.

② **Yatay Asimptot:** Eğer, $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ veya $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ veya her ikisi de mevcut ise $y=L$ f(x) fonksiyonunun bir yatay asimptotudur.

③ **Eğik Asimptot:** Bir rasyonel fonksiyonda payın derecesi paydanın derecesinden 1 büyük ise fonksiyon eğik asimptota ($y=mx+n$ şeklinde bir doğru) sahiptir. Pay paydaya bölünüp asimptot bulunur.

II. Yol

$y=f(x)$ $\quad y=\alpha x+\beta \rightarrow$ eğik asimptot

$\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ $\qquad \beta=\lim_{x\to\infty}(y-\alpha x)$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

(*) $f(x)=\frac{1}{x^2-x}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

$x^2-x=0$ $\boxed{x=1}$ $\boxed{x=0}$ dikey asimptotlar

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-x}=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$ yatay asimptot.

Eğik asimptotu yok!

(*) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ fonksiyonunun asimptotları?

$\boxed{x=0}$ dikey asimptot.

Yatay asimptotu yok.

$f(x)=\boxed{x}+\frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{y=x}$ eğik asimptot

$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

$y=1$

$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=y=1$

$x=0$

Bir Rasyonel Fonksiyonun Asimptotları

$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ olsun. $P(x)$ m. dereceden, $Q(x)$ n. dereceden iki polinom olsun. O zaman,

a) $Q(x)=0$ olan her x noktasında fonksiyonun dikey asimptotu vardır.

b) $m<n$ ise fonksiyonun $y=0$ yatay asimptotu vardır.

c) $m=n$ ise fonksiyonun $y=L$ yatay asimptotu vardır. Burada L, $P(x)$ ve $Q(x)$ in en büyük dereceli terimlerinin katsayıları oranıdır.

d) $m=n+1$ ise fonksiyon bir eğik asimptota sahiptir.

$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=ax+b+\frac{R(x)}{Q(x)} \Rightarrow y=ax+b$ eğik asimptot

e) $m>n+1$ ise eğik veya yatay asimptot yoktur.

tonozdayim.com/@Zedeleyicim

⊛ $y = \frac{x^3}{x^2+x}$ in asimptotları?

$x^2+x=0 \Rightarrow x=0 \quad x=-1$ dikey asimptot

Yatay Asimptot yok.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+x \\ \hline -x^3+x^2 & \boxed{x-1} \\ \hline -x^2 & \\ -\,-x^2-x & \\ \hline +x & \end{array} \rightarrow y=x-1 \text{ eğik asimptot}$$

Basit Eğri Çizimleri:

Bir fonksiyonun $y=f(x)$ grafiğini çizerken kullanabileceğimiz bilgiyi elde etmek için 3 kaynağımız vardır:

① Fonksiyonun Kendisi: Fonksiyonu kullanarak grafik üzerinde bulunan bazı noktaların koordinatlarını, grafiğin simetrikliğini, bazı asimptotları belirleriz.

② Fonksiyonun Birinci Türevi: f' yü kullanarak fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları, bazı yerel ekstremum değerlerini belirleriz.

③ Fonksiyonun İkinci Türevi: f'' yü kullanarak fonksiyonun konkavliğini, bükülme noktalarını belirleriz.

Eğri Çizimi için Kontrol Listesi

① Aşağıdakiler için $f(x)$ i incele:

a) Asimptotlar (Yatay, Dikey, Eğik); Tanım Kümesi

b) Simetri (fonk. tek veya çift fonksiyon mu?)

c) Eksenleri kesim noktaları.

tonozdayim.com/@Zedeleyici81

② Aşağıdakiler için $f'(x)$ i incele:

a) Kritik noktalar ($f'(x)=0$ veya $f'(x)$ in tanımsız olduğu noktalar)

b) $f'(x)$ in pozitif ve negatif olduğu aralıklar, Ekstremumlar

③ Aşağıdakiler için $f''(x)$ i incele:

a) $f''(x)=0$ veya f'' i tanımsız yapan noktalar

b) f'' nün pozitif veya negatif olduğu aralıklar

c) Bükün noktaları

④ Tüm noktalar, tablo üzerinde inceleyip eğriyi çiz

(*) $y=\frac{x^2-2}{1-x^2}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Tanım Kümesi: $\mathbb{R}-\{-1,1\} \Rightarrow \boxed{x=1}\ \boxed{x=-1}$ D.A.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{1-x^2}=-1 \Rightarrow \boxed{y=-1}$ Y.A. Eğik Asimptot yok.

$x\to -x \Rightarrow f(-x)=\frac{x^2-2}{1-x^2}=f(x)$ → Çift Fonk. → y-eksenine göre simetrik

$y'=\frac{2x(1-x^2)-(-2x)(x^2-2)}{(1-x^2)^2}=-\frac{2x}{(1-x^2)^2}=0 \to \boxed{x=0}$ K.N

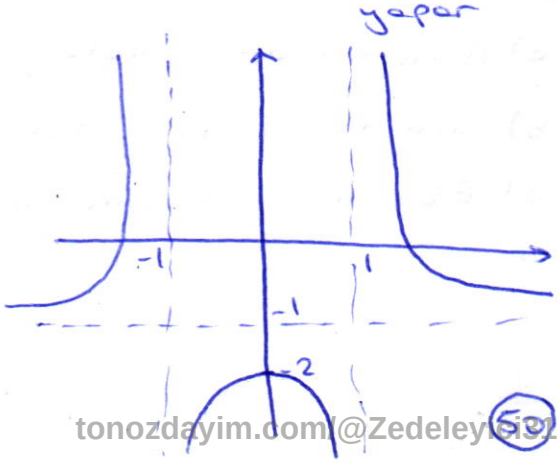
$\underbrace{x=\mp 1}_{(\text{Ç.K.K})}$ f' yü tanımsız yapar

$y''=-\frac{2(1-x^2)^2-2x\cdot 2\cdot(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}=-\frac{-2x^2+2+8x^2}{(1-x^2)^3}=-\frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$

$x=\mp 1$ f'' yü tanımsız yapar

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		+	T.yok	+	0	−	T.yok	−	
f''		+	T.yok	−		−	T.yok	+	
f		↗	T.yok	↗	y. max	↘	T.yok	↘	
		$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$		

∓ 1



tonozdayim.com/@Zedeleyici2

(*) $y = \frac{x^2+2x+4}{2x}$ eğrisini çiziniz.

Tanım Bölgesi: $\mathbb{R} - \{0\}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x=0}$ D.A.

Yatay Asimptot Yok.

$y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{2}{x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = \frac{x}{2}+1}$ E.A.

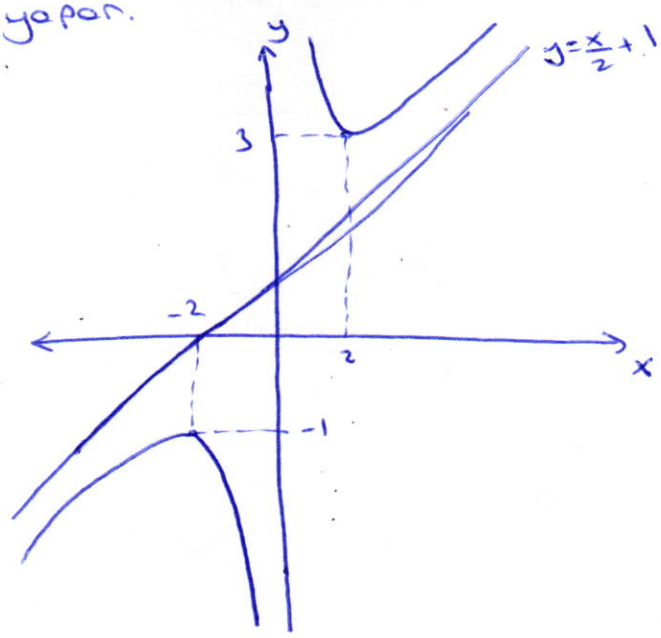
$y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2} = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = \mp 2}$ K.Nokta

$x=0$ y' yü tanımsız yapar (G.K.K)

$y'' = \frac{4}{x^3}$ $x=0$ y'' yü tanımsız yapar.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
f'	+	0	−	T.Yok	−	0	+
f''	−		−	T.Yok	+		+
f	$-\infty$ ↗	max	↘	$+\infty$ T.Yok $-\infty$	↘	min	↗ $+\infty$

max $y=-1$ min $y=3$

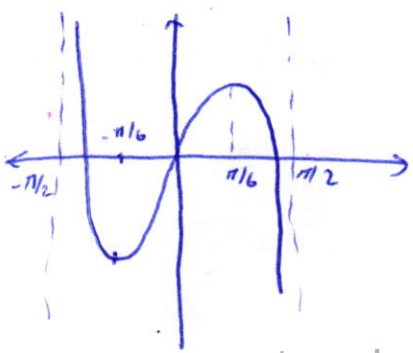


(*) $y = \frac{4}{3}x - \tan x$ eğrisini çiziniz. $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right.$ aralığında çizin)

$y' = \frac{4}{3} - \sec^2 x = \frac{4}{3} - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{3}{4} = \cos^2 x$ $\Rightarrow$ $\cos x = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{x = \frac{\pi}{6}, \; x = -\frac{\pi}{6}}$ K.N.

$y'' = -2\sec x . \sec x \tan x = -2\sec^2 x \tan x = -2\frac{\sin x}{\cos^3 x} = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x=0}$

x	$-\pi/2$		$-\pi/6$		0		$\pi/6$		$\pi/2$
f'	−		0	+		+	0	−	
f''	+			+	0	−		−	
f	↘		min	↗	B.N.	↗	max	↘	



$x=0 \rightarrow y=0$

$x=-\frac{\pi}{6} \rightarrow y = -\frac{2\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ (0,17) (0.57)

$x=\frac{\pi}{6} \rightarrow y = \frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

tonozdayim.com/@Zedeleyici31