# Artan / Azalan Fonksiyonlar

TYT

$f(x)$, $[a,b]$ de sürekli, $(a,b)$ de türevli olsun.

* $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0$ ise $f(x)$ $[a,b]$ de artandır.
* $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) < 0$ " $f(x)$ $[a,b]$ de azalandır.

---

(*) $f(x) = 6x^2 - x^4 - 4$ fonksiyonunun artan/azalan olduğu aralıklar?

$f'(x) = 12x - 4x^3 = 0 \quad x = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$

| x | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | 0 | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 − | 0 | + 0 | − |
| f(x) | ↗ | ↘ | ↗ | ↘ | |

$(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}]$ → artan

$[-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, \infty)$ → azalan

(Not: Aralıkları açık aralık olarak da yazabilirsiniz!)

---

(*) $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 15x^3$ artan/azalan old. aralıklar?

$f'(x) = 15x^4 - 60x^3 + 45x^2 = 15x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$ $\boxed{x=0}$ Ç.K.K.

$\boxed{x=3}$ $\boxed{x=1}$

| x | $-\infty$ | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| f' | + | 0 + | 0 − | 0 + |
| f | ↗ | ↗ | ↘ | ↗ |

$(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ → Artan

$(1, 3)$ → Azalan

(Not



http://avesis.yildiz.edu.tr/pkanar/dokumanlar

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

# Ters Fonksiyonlar ve Türevleri:

## Bire-bir Fonksiyon:

O tanım kümesinde $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksiyonu O tanım kümesinde bire-bir fonksiyondur denir.

* $y=f(x)$ in grafiği her yatay doğruyu ancak ve ancak en fazla bir kere kesiyorsa bire-birdir.
* Bir fonksiyon bir I aralığında bire-bir ise o aralıkta artan veya azalandır.

## Ters Fonksiyon:

f, O tanım kümesi üzerinde görüntü kümesi R olan bire-bir bir fonk. olsun. Ters fonksiyon $f^{-1}$ şöyle tanımlanır:

eğer $f(b)=a$ ise $f^{-1}(a)=b$ dir.

$f^{-1}$ nin tanım kümesi R, görüntü kümesi O dir.

## Özellikler:

1. $y=f^{-1}(x) \iff x=f(y)$
2. $f^{-1}$ nin tanım kümesi, f in değer kümesidir.
3. " " değer " , " " tanım "
4. $f^{-1}(f(x))=x$ , $f(f^{-1}(x))=x$ dir.
5. $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$ dir.
6. f ve $f^{-1}$ nin grafikleri $x=y$ doğrusuna göre simetriktirler.

## Ters Fonksiyonu Bulma:

$f(x)$ den $f^{-1}(x)$ i bulmak için:

1. $y=f(x)$ den x çözülür. Yani $x=f^{-1}(y)$ bulunur.
2. y ile x yer değiştirilir, $y=f^{-1}(x)$ oluşturulur.

http://avesis.yildiz.edu.tr/pkanar/dokumanlar



tonozdayim.com/@Zedeleyici31

## Ters Fonksiyonun Türevi:

T14

Eğer $f$ in tanım kümesi $I$ ise ve $I$ üzerinde $f'(x)$ varsa ve hiç 0 olmuyorsa, $f^{-1}$ tanım kümesinin her noktasında ($f$ in görüntü kümesinde) türevlenebilirdir; ve türevi

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{dir.}$$

★ $a = f^{-1}(b)$ için $(f(a) = b)$

★ $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}$ ★

İspat:

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

---

⊛ $f(x) = x^2 \quad (x>0) \Rightarrow (f^{-1}(x))' = ?$

I. Yol

$x^2 = y \rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

II. Yol

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$f'(x) = 2x$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

---

⊛ $f(x) = x^3 - 2$ olsun. $f^{-1}(x)$ için formül bulmadan $(f^{-1})'(\underset{b}{6})$ değerini bulunuz.

$6 = x^3 - 2 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \rightarrow a$

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{12}$$

$f'(x) = 3x^2$

http://avesis.yildiz.edu.tr/pkanar/dokumanlar



tonozdayim.com/@Zedeleyici31

# Logaritmik Türev

① Çarpım, bölüm, kuvvet içeren formüllerle verilmiş olan pozitif fonksiyonların türevleri; türev almadan önce iki tarafın doğal logaritması alınarak daha kolay bulunur.

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)$$

$$\ln f(x) = \ln f_1(x) + \ln f_2(x) + \cdots + \ln f_n(x)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$$

---

② $f(x) = (g(x))^{h(x)} \Rightarrow \ln f(x) = h(x) \cdot \ln g(x)$

$$\downarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\downarrow$$

$$f'(x) = f(x)\left[ h'(x) \cdot \ln g(x) + \frac{h(x) \cdot g'(x)}{g(x)} \right]$$

---

(*) $f(x) = \dfrac{(x^2+1)\cdot(x-1)^2}{x^4+4}$ $(x \neq 1)$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ türevini logaritmik türev ile bulunuz.

$$\ln f(x) = \ln(x^2+1) + \underbrace{\ln(x-1)^2}_{2\ln(x-1)} - \ln(x^4+4)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+4}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(x-1)^2}{x^4+4} \cdot \left[ \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+4} \right]$$

http://avesis.yildiz.edu.tr/pkanar/dokumanlar



tonozdayim.com/@Zedeleyici31

(*) $f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = ?$

T16

$\ln f(x) = \ln x^x = x \ln x$

↓ Türev

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = x^x \left[ \ln x + 1 \right]$

---

(*) $y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \Rightarrow y' = ?$

$\ln y = \ln (\ln x)^x - \ln (x)^{\ln x}$

$\ln y = x \ln (\ln x) - \frac{\ln x \cdot \ln x}{(\ln x)^2}$

↓ Türev

$\frac{y'}{y} = \ln (\ln x) + x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} - 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$

$y' = \left[ \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \right] \cdot \left( \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right)$

---



tonozdayim.com/@Zedeleyici31

# Belirsiz Şekiller

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty-\infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$ şeklindeki ifadeler belirsizdirler (aritmetik olarak bir anlamları yoktur).

| Belirsizlik Tipi | | Örnek | |
|---|---|---|---|
| $\frac{0}{0}$ | $\longrightarrow$ | $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ | ① Cebirsel işlemler<br>② L'Hôpital ile çözülür |
| $\infty/\infty$ | $\longrightarrow$ | $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot x^2}$ | |
| $0.\infty$ | $\longrightarrow$ | $\lim_{x\to 0^+} x.\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ | Cebirsel işlemler ile $0/0$, $\infty/\infty$ haline dönüştürülür |
| $\infty-\infty$ | $\longrightarrow$ | $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\tan x - \frac{1}{\pi-2x}\right)$ | |
| $0^0$ | $\longrightarrow$ | $\lim_{x\to 0^+} x^x$ | Logaritmik limit ile çözülür |
| $\infty^0$ | $\longrightarrow$ | $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$ | |
| $1^\infty$ | $\longrightarrow$ | $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ | |



tonozdayim.com/@Zedeleyici31

## L'Hopital Kuralı:

① $x \to a$ için $f(x) \to 0, g(x) \to 0$

② $x \to a$ için $f(x) \to \mp\infty, g(x) \to \mp\infty$

} ise $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

* $x \to a$ notasyonunda $a$ sonlu veya sonsuz olabilir.
* $x \to a$ ifadesi $x \to a^+$, $x \to a^-$ ifadeleri ile değiştirilebilir.

---

(*) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{0}{1}$

$\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \to \frac{\infty}{\infty}$

---

(*) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{1+\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{1}{1}$

$\frac{\sec x}{1+\tan x} \to \frac{\infty}{\infty}$

---

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{2e^x - 2}$

$\frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2} \to \frac{0}{0}$ $\quad \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} \to \frac{0}{0}$ $\quad \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{2e^x - 2} \to \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{2e^x} = \frac{-2+8}{2} = \frac{3}{1}$

---

(*) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}$

$\frac{\sin x - x}{x \sin x} \to \frac{0}{0}$ $\quad \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \to \frac{0}{0}$

$= \frac{0}{1}$

---

(*) $\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}$

$\infty \cdot 0$

$\frac{1 - \cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \to \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1} = \frac{1}{2}$



http://avesis.yildiz.edu.tr/pkanar/dokumanlar

tonozdayim.com/@Zedeleyici31

## Logaritmik Limit

$1^\infty$, $0^0$, $\infty^0$ belirsizliklerini veren limitleri çözmek için kullanılır.

---

(*) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = ?$ $\infty^0$ belirsizliği

$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \sin x \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}_{\ln x^{-1} = -\ln x} = -\sin x \cdot \ln x$

$\ln y = -\sin x \cdot \ln x$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{(-\sin x \cdot \ln x)}_{0\cdot\infty} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \quad \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = 1$$

---

(*) $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\cot x} = ?$ $1^\infty$ belirsizliği

$y = (\cos x)^{\cot x} \Rightarrow \ln y = \cot x \cdot \ln \cos x$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\cot x \cdot \ln \cos x}_{\infty\cdot 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \cos x}{\underbrace{\frac{1}{\cot x}}_{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \cos x}{\tan x} \quad \frac{0}{0} \to L'H. = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} \cdot \cos^{\cancel{2}} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \ln\left(\underbrace{\lim_{x\to 0^+} y}_{1}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = 1$$

http://avesis.yildiz.edu.tr/pkanar/dokumanlar



tonozdayim.com/@Zedeleyici31