YTU – Fen-Edebiyat Fakültesi II. Vize Sınav Soru ve Cevap Kağıdı		Not Tablosu				
		1.S	2.S	3.S	4.S	Σ
Adı Soyadı						
Numarası						
Bölümü		Grup No		Tarih	30.11.2019	
Dersin Adı	MAT1071 Matematik I		Süre	100 dk	Sınıf	
Öğretim Üyesi				İmza		

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

1.a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\int_1^{x^3} \tan(t-1)\,dt}{x^3-2x^2+x}$ limitini hesaplayınız. **(12P)**

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^{x^3} \tan(t-1)\,dt}{x^3-2x^2+x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{(1)\ L'H}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2\tan(x^3-1)}{3x^2-6x+1}\ (1) \to \frac{0}{0}$$

(3) (1) (3)

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{6x\tan(x^3-1)+3x^2\cdot 3x^2\cdot \sec^2(x^3-1)}{6x-4\ (1)} = \frac{9}{2}$$

(2)

1.b) $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlı $f(x) = 3 + \int_0^x \dfrac{1+\sin t}{2+t^2}\,dt$ fonksiyonu verilsin.

$f(0)=p(0)$, $f'(0)=p'(0)$ ve $f''(0)=p''(0)$ şartlarını sağlayan $p(x)=ax^2+bx+c$ polinomunu bulunuz. **(13P)**

$p(0)=c$ (1)

$f(0) = 3+\int_0^0 \frac{1+\sin t}{2+t^2}\,dt = 3$ (1) $\Rightarrow \boxed{c=3}$ (1)

$p'(x)=2ax+b \Rightarrow p'(0)=b$ (1) (1)

$f'(x)=\frac{1+\sin x}{2+x^2}$ (1) $\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$ (1) $\Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$ (1)

$p''(x)=2a \Rightarrow p'(0)=2a$ (1)

$f''(x)=\frac{\cos x\cdot(2+x^2)-2x\cdot(1+\sin x)}{(2+x^2)^2}$ (1)

$f''(0)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2a=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$ (1) (1)

$\boxed{p(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+3}$ (1)

Başarılar...

Scanned with CamScanner

2.a) **Ortalama Değer Teoremini kullanarak,** her $a > 0$ sayısı için

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} < \ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right) < a$$ eşitsizliğinin sağlandığını ispatlayınız. **(15P)**

(2) $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ $[0,a]$ olsun. (1)

1) $f(x)$, $[0,a]$ da sürekli (1)

2) $f'(x) = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (2) $(0,a)$ da tanımlı olduğundan $f(x)$, $(0,a)$ da türevlidir. (1)

$f(x)$'e $[0,a]$ da ODT uygulanabilir.

(1) $f'(c) = \dfrac{f(a)-f(0)}{a}$ o.s. $c \in (0,a)$ vardır.

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{\ln(a+\sqrt{1+a^2})}{a}$$ (2)

$c \in (0,a) \Rightarrow 0 < c < a$ (1)

$1 < \sqrt{1+c^2} < \sqrt{1+a^2}$ (1)

$\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} < 1$ (1)

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} < \frac{\ln(a+\sqrt{1+a^2})}{a} < 1$$ (1)

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} < \ln(a+\sqrt{1+a^2}) < a}$$ (1)

2.b) $f(x) = x^{\sin x}$ fonksiyonunun $x = \dfrac{\pi}{2}$ noktasındaki türevini hesaplayınız. **(10P)**

$f(x) = x^{\sin x}$

(2) $\ln f(x) = \sin x \cdot \ln x$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ (1)

(2) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \underset{(1)}{\cos x} \cdot \ln x + \underset{(1)}{\sin x} \cdot \frac{1}{x}$

$f'(x) = f(x) \cdot \left[\cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right]$

$f'(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) \cdot \left[\underbrace{\cos\frac{\pi}{2} \cdot \ln\frac{\pi}{2}}_{0\ (1)} + \underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}}_{1\ (1)} \cdot \frac{2}{\pi}\right]$

$f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = 1$ (1)

Başarılar...

Scanned with CamScanner

3.a) $f(x)=x^3+x$ eğrisinin altında, x-ekseninin üzerinde ve $x=0$, $x=2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını **Üst Riemann Toplamı ile** hesaplayınız. **(14P)**

$f(x)=x^3+x$, $[0,2]$

$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$ (1)

$[0,2]$ aralığını n eşit parçaya bölersek : $\boxed{\Delta x_i=\frac{2}{n}}$ (1)

$f(x)=x^3+x$ artan fonksiyon olduğundan Üst Riemann Toplamı için aralıkların sağ uç noktaları alınır. (2)

$c_i=x_i=0+i\cdot\frac{2}{n} \Rightarrow \boxed{c_i=\frac{2i}{n}}$ (2)

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8i^3}{n^3}+\frac{2i}{n}\right)$$ (1) (1)

$$=\frac{2}{n}\left[\frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$ (2) (2)

$$\text{Alan}=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n^2(n+1)^2}{n^4}+\frac{2\cdot(n+1)}{n}\right]=4+2=6$$ (1) (1) //

3.b) $f(x)=-|x|$ fonksiyonunun $[-2,1]$ aralığındaki ortalama değerini hesaplayınız. **(11P)**

$$f_{ort}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{1-(-2)}\int_{-2}^{1}-|x|\,dx$$ (1) (1)

$$=\frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{0} x\,dx+\int_{0}^{1}-(x)\,dx\right]$$ (3) (3)

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}$$ (1) (1)

$$=-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=-\frac{5}{6}$$ (1) //

Scanned with CamScanner

4.) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ ile tanımlı f fonksiyonunun tanım kümesini; yatay, düşey ve eğik asimptotlarını; artan ve azalan olduğu aralıkları, ekstremum noktalarını, konkavlığını ve büküm (dönüm) noktalarını inceleyiniz. Tüm sonuçları **tek** bir tabloda göstererek f nin grafiğini çiziniz. **(25P)**

$D(f): \mathbb{R}-\{-1,1\}$ (1)

Düşey Asimptot : $x=-1$ (1), $x=1$ (1) $\left(\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty\right)$

Yatay Asimptot : $y=1$ (1) $\left(\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=1\right)$

Eğik Asimptot : Yok (1)

$f'(x)=\dfrac{2x.(x^2-1)-2x.(x^2-4)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{6x}{(x^2-1)^2}$ (1)

$6x=0 \rightarrow x=0$ (1) K.N

$(x^2-1)^2=0 \rightarrow x=\pm 1 \notin D(f)$

$f''(x)=\dfrac{6(x^2-1)^2-6x.2(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4}=-\dfrac{6+18x^2}{(x^2-1)^3}$ (1)

$6+18x^2=0 \rightarrow x=\mp 1 \notin D(f)$

Büküm Noktası Yok. (1)

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
f'		−	∄	−	0	+	∄	+	(4)
f''		−	0	+	|	+	0	−	(4)
f		↘		↘	yerel min.	↗		↗	

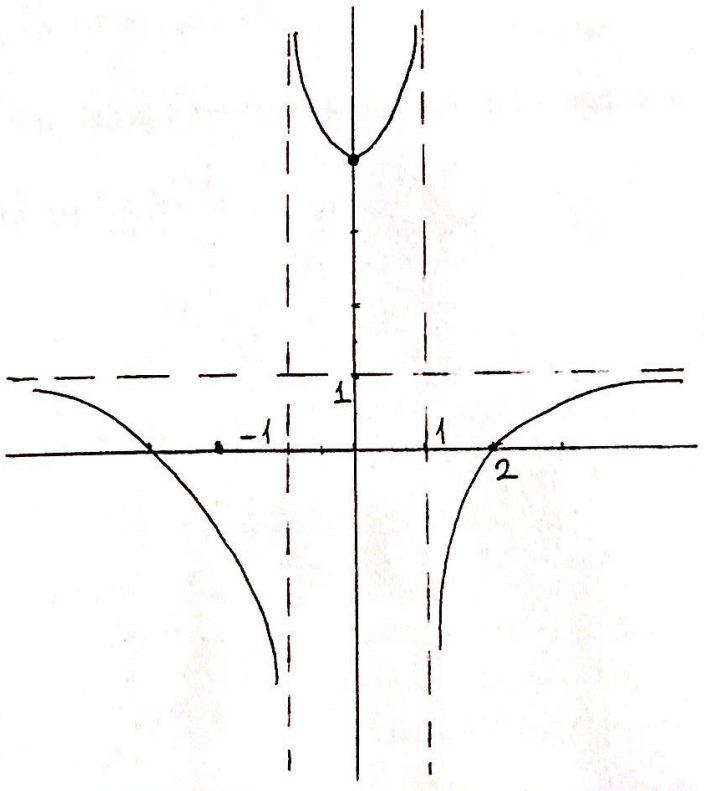
Artan : $(0,1)\cup(1,\infty)$ (1)

Azalan : $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ (1)

Y. Konkav : $(-1,1)$ (1)

A. Konkav : $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ (1)

$(0,4) \rightarrow$ Yerel minimum (1)



(3)

Başarılar...

Scanned with CamScanner